סמסטר ב', מועד א', תשס"ו
תאריך הבחינה: 27.06.2006
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

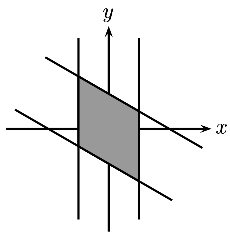
משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

=42

עבור $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ נגדיר קבוצות



$$\begin{aligned} A_\varphi &= \{(x,y) : |x\cos\varphi + y\sin\varphi| < 0.5\}\,, \\ A_0 &= \{(x,y) : |x| < 0.5\}\,, \\ B_\varphi &= A_\varphi \cap A_0\,. \end{aligned}$$

בוחרים באקראי נקודה (X,Y) מתוך המעוין B_φ (לפי ההתפלגות האחידה במעוין).

(א) האם X בעל התפלגות אחידה? 8
האם Y בעל התפלגות אחידה?

. . . .

(ב) מצא f_X (צפיפות שולית), $f_{Y|X}$ (צפיפות מותנה), $f_{X,Y}$ (צפיפות משותפת), וגם 9
את השטח S_φ של המעוין B_φ.

. . . .

(ג) מצא $\mathbb{E}\left(Y \,\middle|\, X\right)$ (תוחלת מותנה). 8

. . . .

(ד) האם מ"מ X ו- $Y - \mathbb{E}\left(Y \,\middle|\, X\right)$ בלתי תלויים? 8

. . . .

(ה) מצא $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ (תוחלות), ו- $\mathrm{Var}\left(X\right)$, $\mathrm{Var}\left(Y\right)$ (שונויות). 9
רמז: Y הוא סכום של שני מ"מ ב"ת.

שאלה 2

=36

9 (א) יהי $\omega = (0.\alpha_1\alpha_2\dots)_{10}$ פיתוח עשרוני,

$$B = \{\omega \in (0,1) : \forall k \ \ \alpha_{k+1} \le 1 + \alpha_k\}.$$

הוכח ש- B היא קבוצת בורל.

....

9 (ב) יהיו $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ מ"מ כך ש- $F_X(t) \ge F_Y(t)$ לכל $t \in \mathbb{R}$. נתבונן בהסתברות $p = \mathbb{P}\big(X \le Y\big)$.

האם יתכן ש- $p < 1$?

האם יתכן ש- $p = 0$?

....

9 (ג) יהיו $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ מאורעות.

האם יתכן ש- $\limsup A_{n^2} \ne \limsup A_n$?

האם זה יתכן עבור סדרה עולה ($A_1 \subset A_2 \subset \dots$)?

....

9 (ד) יהיו $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ מ"מ בעלי צפיפות משותפת $f_{X,Y}$.

האם יתכן ש- $f_{X,Y}$ חסומה, אבל f_{X,Y^2} לא חסומה?

האם יתכן ש- $f_{X,Y}$ לא חסומה, אבל f_{X,Y^2} חסומה?

שאלה 3

=42

בוחרים באקראי $\Phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (לפי ההתפלגות האחידה), בונים מעוין $B_\Phi = A_\Phi \cap A_0$ כמו בשאלה 1, ובוחרים באקראי נקודה (X,Y) מתוך המעוין (לפי ההתפלגות האחידה במעוין).

---

9 (א) הוכח ש- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{\pi}$ כאשר $\sqrt{x^2+y^2} < 0.5$,
אבל $f_{X,Y}(x,y) < \frac{2}{\pi}$ כאשר $\sqrt{x^2+y^2} > 0.5$.

רמז:

$f_{X,Y|\Phi=\varphi}(x,y) = \sin\varphi$ עבור $(x,y) \in B_\varphi$.

משחזרים את הניסוי אינסוף פעמים (ללא תלות בין הניסוים), מקבלים מ"מ Φ_n, X_n, Y_n עבור $n = 1, 2, 3, \dots$

---

8 (ב) נתבונן בקבוצה המקרית

$$\{n \le 100 : \sqrt{X_n^2 + Y_n^2} \le 0.5\}.$$

מצא את תוחלת מספר האיברים בקבוצה.

8 (ג) נתבונן בקבוצה המקרית

$$\{n < \infty : \sqrt{X_n^2 + Y_n^2} \leq 0.5\}\,.$$

מצא את ההסתברות לכך שהקבוצה היא אינסופית.

8 (ד) נתבונן בקבוצה המקרית

$$\left\{n < \infty : \sqrt{X_n^2 + Y_n^2} \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

מצא את ההסתברות לכך שהקבוצה היא אינסופית.

9 (ה) מה אפשר לומר על הסגור של הקבוצה המקרית בת-המניה $\{(X_n, Y_n) : n = 1, 2, \dots\}$ במישור?