חישוב שגיאות

כל מדידה כרוכה באי-וודאות מסוימת. ככל שהמדידה מדויקת יותר, יורדת אי-הוודאות, אבל היא תמיד קיימת. ככלל אי אפשר לדעת את הערך האמיתי של הדבר שאנו מודדים, אם כי אפשר להתקרב אליו. בעזרת הסטטיסטיקה, ניתן לחשב את הגבולות שביניהם נמצא הערך האמיתי ברמה נתונה של סבירות.

הגדרת מושגים

כדי לערוך מדידה במעבדה מבצעים בדרך כלל בין 2 ל- 5 מדידות ומהתוצאות שמקבלים קובעים את הערך המייצג (המכונה גם "המרכזי", או "הטוב ביותר").

הערך המייצג המקובל ביותר הוא **המְמוּצע** (mean, average) שהוא הערך המתקבל מחלוקת הסכום של הערכים הבודדים ע"י מספר המדידות:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

ערך מייצג אחר הוא <u>החציון</u> (median). החציון הוא הערך המרכזי מבחינת הגודל. (כאשר מספר התוצאות הוא זוגי, החציון הוא הממוצע בין שני הערכים המרכזיים).

איכות המדידות נמדדת ע"י שני מושגים: **הדירות** (precision)

ו- **דיוק** (accuracy)

ההדירות מבטאת את הקרבה בין שתי תוצאות או יותר.

הדיוק הוא הקרבה של מדידה לערך האמיתי (או יותר נכון הערך המקובל, כיוון שהערך האמיתי אינו ידוע במדויק).

מדידה כמותית של ההדירות היא **סטית התקן** (standard deviation):

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

$x_i - \bar{x}$ היא **הסטיה מהממוצע** של מדידה מספר i.

לגבי **<u>הדירות</u>** מדברים על **<u>סטיה</u>** (deviation), לגבי **<u>דיוק</u>** מדברים על **<u>שגיאה</u>** (error).

μ הוא הערך האמיתי $e = x_i - \mu$

מכיוון שיש חשיבות אם הערך שהתקבל גבוה או נמוך מהערך האמיתי , יש תמיד לציין זאת ברישום השגיאה.

עד עכשיו התייחסנו לערכים <u>המוחלטים</u> של הסטיה, של סטית התקן ושל השגיאה . הערכים הם מוחלטים, לא במובן המתמטי, אלא בזה שהם בעלי אותן יחידות כמו במדידות , לדוגמה: גרם, ס"מ, או מול בליטר.

כדי לקבל מושג על <u>שיעור</u> אי-ההדירות או אי-דיוק, אפשר לחשב

(א) **<u>סטית התקן היחסית</u>** (relative standard deviation, RSD): $s_r = \frac{s}{\bar{x}}$

אם מכפילים את ה- RSD ב- 100 מקבלים את שיעור אי-ההדירות באחוזים ואז

הוא מכונה coefficient of variation או CV: $CV = 100s/x$

(ב) **<u>השגיאה היחסית</u>** (relative error): $e_r = \frac{x_i - \mu}{\mu}$ או באחוזים, $\frac{100(x_i - \mu)}{\mu}$

<u>ספרות משמעותיות ועיגול מספרים</u>

(א) <u>מנית ספרות משמעותיות (ספרות ערך), ההתיחסות לספרה 0</u>

קיום או העדר משמעות של הספרה 0 תלוי במקום שלה . ברור שבמספר 1.03 האפס משמעותי ולמספר שלוש ספרות ערך.

לגבי מספר כמו 0.001230, האפסים בין הנקודה העשרונית לספרה הלא- אפסית הראשונה **אינם** משמעותיים. ניתן לרשום מספר זה $1.230x10^{-3}$.

הספרה 0 <u>אחרי</u> הספרה 3 **משמעותית** ואין להשמיט אותה. היא מציינת את העובדה שערך המספר נמצא בין 0.001229 ל- 0.001231 .

לגבי מספרים גדולים, לדוגמה, 1200. אי-אפשר לדעת מצורת הרישום של המספר אם אי-הוודאות היא ±1, ±10 או ±100 . מספר כזה יש לרשום בצורה אקספוננציאלית : $1.200x10^3$, $1.20x10^3$ או $1.2x10^3$ בהתאם לאי-וודאות של ±1, ±10 או ±100 .

(ב) <u>עיגול מספרים</u>

בחישובים שעשינו בעמודים הקודמים , נרשם קודם התוצאה כפי שהיא הופיעה בצג של המחשב ולאחר מכן היא נרשמה במספר מצומצם יותר של ספרות.

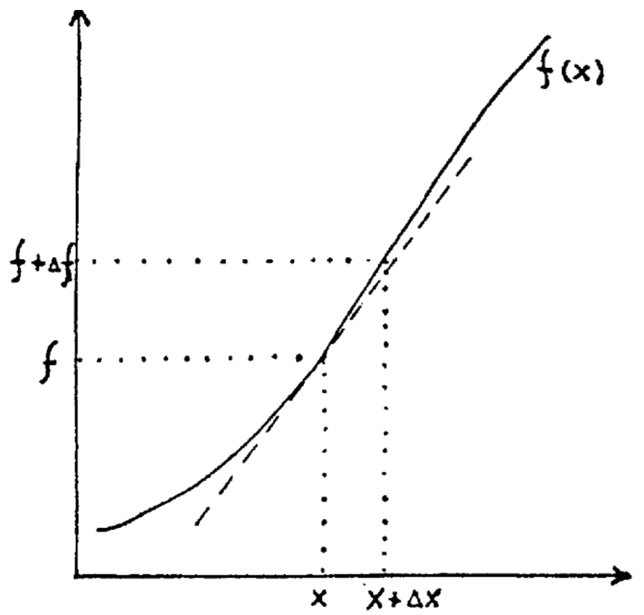
שגיאה נגררת

בסעיפים הקודמים דיברנו על השיטות להערכת שגיאה של גדלים הנמדדים ישירות באמצעות מכשירי המדידה; לדוגמה, אורך הנמדד בסרגל או זמן הנמדד באמצעות שעון הם גדלים הנמדדים ישירות. לעתים קרובות אנו מעוניינים לא רק בגדלים הנמדדים עצמם , אלה גם **בגדלים עקיפים** שהם פונקציות של הגדלים הנמדדים ישירות. לדוגמא:

א. אנו מודדים זווית בעזרת מד-זווית, אולם לצורך חישובים כלשהם אנו מעוניינים בסינוס של הזווית ולא בזווית עצמה.

ב. אנו מעוניינים למדוד שטח של מלבן ; לשם כך אנו מודדים בסרגל את אורכו ורוחבו , ומכפילים אותם זה בזה . כאן, השטח הוא פונקציה (מכפלה) של האורך והרוחב . מכיוון שהגודל העקיף הוא פונקציה של הגדלים הנמדדים ישירות , ברור ששגיאה במדידת הגדלים הישירים תגרום לשגיאה בהערכת הגודל העקיף . בסעיפים הקודמים ראינו כיצד להעריך את שגיאותיהם של הגדלים הנמדדים ישירות: כעת, כשאנו יודעים את גודלם של השגיאות האלו, אנו מעוניינים לחשב בעזרתן את השגיאה של הגודל העקיף . בניסוח מתמטי , אנו מעוניינים לענות על השאלה: אם f הוא פונקציה מסוימת של גדלים שונים $x, y, z...$ ושגיאותיהם של הגדלים האלו הן $\Delta x, \Delta y, \Delta y...$, מהי השגיאה Δf ? כדי לענות על השאלה נטפל במקרה הפשוט, שבו f הוא פונקציה של גודל אחד בלבד שהו x .

א. חישוב שגיאה בפונקציה של משתנה אחד



כזכור, אנו מניחים שידועות לנו צורת הפונקציה $f(x)$, תוצאת המדידה x ושגיאתה Δx . אפשר לנסח מחדש את השאלה שלנו כך : נניח שהתוצאה x משתנה ב- Δx , מהו השינוי Δf של f ? כדי לענות על השאלה , נסתכל בגרף המתאר את $f(x)$ כפונקציה של x (ראה תרשים).

הנקודות (x,f) ו- $(x+\Delta x, f+\Delta f)$ נמצאות שתיהן על הגרף. בהנחה שהשגיאות קטנות (כלומר Δx ו- Δf קטנים), ושהפונקציה $f(x)$ איננה משתנה באופן קיצוני בסביבה של x, אזי בתחום שבין x ל- $x+\Delta x$ הפונקציה $f(x)$ קרובה לקו הישר המשיק לגרף בנקודה (x,f) (הקו המרוסק בגרף שבתרשים דלעיל), ולכן היחס בין Δf ל- Δx שווה בערך לשיפוע המשיק, כלומר לנגזרת של $f(x)$ בנקודה x. לכן:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \cong \frac{df}{dx} \qquad (1)$$

(זוהי למעשה הנגזרת) כלומר:

$$\Delta f = \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta x \qquad (4)$$

וזוהי התשובה לשאלתנו. הערך המוחלט נכנס כאן משום שאנו מעוניינים רק בגודלה של השגיאה Δf, ואיננו רוצים שסימן מינוס שמקורו בנגזרת (אם $f(x)$ היא פונקציה יורדת של x) יופיע בתשובה הסופית. כזכור, אנו מחשבים את הנגזרת בנקודה x, כלומר בנקודה המתאימה לתוצאת המדידה שבצענו.

ב. חישוב שגיאה בפונקציה של כמה משתנים

כעת אנו נניח שיודעות לנו צורת הפונקציה $f(x,y,z...)$, תוצאות המדידה $x,y,z...$ ושגיאותיהן $\Delta x, \Delta y, \Delta z...$. כדי לענות על שאלתנו עכשיו, ננסה לענות קודם על שאלה פשוטה יותר: נניח שרק x משתנה ב- Δx, וכל שאר הגדלים $y,z...$ נשארים קבועים; מהו השינוי ב- f הנגרם רק על-ידי השינוי ב- x? (נסמן שינוי זה של f ב- $\Delta_x f$). כיוון שהגדלים $y,z...$ אינם משתנים, אפשר להתייחס ל- f כאילו היא פונקציה של x, ולגזור אותה: נגזרת כזו, המתקבלת כתוצאה מגזירת פונקציה רבת- משתנים ביחס למשתנה אחד בלבד, כאשר מתייחס לכל שאר המשתנים כאילו היו קבועים, נקראת בשם **נגזרת חלקית** ומסומנת כך: $\frac{\partial f}{\partial x}$. כעת אפשר להשתמש בנוסחה (4) ולקבל:

$$\Delta_x f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x \qquad (5)$$

באופן דומה, $\Delta_y f = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y$, $\Delta_z f = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z$ וכו'.

לאחר שחישבנו את גודלם של השינויים $\Delta_x f, \Delta_y f ...$ (נכנה שינוים אלו בשם **השגיאות החלקיות**), נחזור לשאלה המקורית : מהו השינוי Δf הנגרם בגלל השינויים בכל הגדלים $x, y, z...$? אנו מניחים שהשגיאות החלקיות קטנות , ולכן אפשר להתעלם מהשפעתו של השינוי של אחד מהגדלים האלו על גודלן של השגיאות על גודלן של השגיאות החלקיות הנגרמות בגלל שאר הגדלים. לכן, השינוי של כל אחד מהגדלים $x, y, z...$ יסיט את ערכה של הפונקציה f כלפי מעלה או מטה בכמות השווה לגודלה של השגיאה החלקית המתאימה שחישבנו בעזרת הנוסחה (5). במקרה הגרוע ביותר, שבו כל השגיאות החלקיות מסיטות את f לאותו כיוון, יהיה גודל השינוי של f שווה לסכום כל השגיאות החלקיות, כלומר:

$$\Delta f = \Delta_x f + \Delta_y f + ... = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + ... \qquad (6)$$

אולם הערכה זו היא פסימית מדי . ראשית, הערכות השגיאה שלנו הן מכסימליות , וברוב המקרים תהיה השגיאה האמיתית במדידת x קטנה מהערכה Δx; הסיכוי לכ ך שכל השגיאות יקבלו בבת- אחת את ערכן המקסימלי הוא קטן . שנית, מכיוון שאנו עוסקים בשגיאות אקראיות, חלק מהשגיאות של הגדלים הנמדדים ישירות יגדילו את ערכו של f ואחרות יקטינו אותו . לכן, הערכת השגיאה הכללית המתקבלת מנוסחה (6) היא מוגזמת. תורת הסטטיסטיקה (שוב לא נביא כאן את החישוב) מאפשרת לקבל הערכה טובה יותר לגודלו של Δf: הערך הסביר ביותר של Δf הוא שורש בכום הריבועים של השגיאות החלקיות, כלומר:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right) + ...} \qquad (7)$$

(ויתרנו על הערך המוחלט משום שה עלאה בריבוע מבטלת את הסימן). במעבדה נשתמש אפוא בנוסחה (7) ולא בנוסחה (6). כדוגמאות לשימוש בנוסחה (7), נחשב נוסחאות כלליות שימושיות עבור פונקציות פשוטות.

א. חישוב שגיאה של סכום ושל הפרש

נניח שאנו מעוניינים לחשב שגיאה של סכום שני גדלים , שלכל אחד מהם שגיאה משלו .
כלומר, $f = x + y$ ולכן $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ (כי טל y אנו מתייחסים כאל רבוע , הנופל בגירה, הנגזרת של x ביחס לעצמו היא 1), וגם $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$. לכן, לפי נוסחה (5):

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad (6)$$

כלומר, שגיאת הסכום f שווה לשורש סכום הריבועים של שגיאות המחוברים . כלל זה תקף גם עבור יותר משני מחוברים . קל לראות שנוסחה (6) תקפה עבור הפרש , כלומר גם עבור $f = x - y$.

ב. חישוב שגיאה של מכפלה של מנה

נניח כי, $f = xy$. כעת $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y} = x$. לכן, לפי נוסחה (7)

$$\Delta f = \sqrt{y^2(\Delta x)^2 + x^2(\Delta y)^2} \qquad (7)$$

ערכה של השגיאה היחסית של $\frac{1}{f}$ שווה אפוא:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\sqrt{y^2(\Delta x)^2 + x^2(\Delta y)^2}}{xy} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \qquad (8)$$

כלומר, השגיאה היחסית של מכפלה שווה לשורש סכום הקיבועים של השגיאות היחסיות של הכופלים. כלל זה תקף גם עבור יותר משני כופלים . אפשר להראות (ההוכחה ניתנת בתרגיל) שנוסחה (8) תקפה עבור המנה, כלומר עבור $f = \frac{x}{y}$.

ג. הערות

1. בנוסחאות (6) ו-(8) אפשר להשתמש גם עבור ביטוי מסובך המורכב מ סכומים ומכפלות (או מנות). לדוגמא, אם $f=\dfrac{x+y}{z-w}$, אזי אפשר לחשב את השגיאה של המונה $x+y$ ושל המכנה $z-w$ בעזרת נוסחה (5), לחשב את השגיאה של f. קל להראות (ההוכחה ניתנת כתרגיל) שהתוצאה היא

$$\Delta f=\frac{x+y}{z-w}\sqrt{\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(x+y)^2}+\frac{(\Delta z)^2+(\Delta w)^2}{(z-w)^2}} \qquad (9)$$

אולם יש להיזהר מהפעלת שיטה זו . נוסחאות (6) ו-(8) תקפות רק כאשר הגורמים x ו- y אינם תלויים זה בזה ; לדוגמה, כאשר אותו גורם מופיע גם במונה וגם במכנה של מנה (למשל, כאשר $f=\dfrac{x}{x+y}$) אזי שגיאתו תשפיע גם על המונה וגם על המכנה, ולכן שגיאות המונה והמכנה לא יהיו בלתי תלויות זו בזו . במקרה כזה (ובכל מקרה של ספק) עלינו לגזור במפורש את f ולהשתמש בנוסחה (5).

2. על הכללים שפורטו בסעיפים 3 ו- 4 (בעניין רישום השגיאה וספרות משמעותיות) נקפיד כמובן גם כאשר שגיאה היא של גודל עקיף, כלומר נרשום $f\pm\Delta f$ ונסלק ספרות לא משמעותיות.