נראה כי אכן $[\hat{x},\hat{p}_y]=0$:

$$[\hat{x},\hat{p}_y]\psi(x,y)=-i\hbar x\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y)+i\hbar\frac{\partial}{\partial y}x\psi(x,y)=-i\hbar x\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y)+i\hbar x\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y)=0$$

תכונות של אופרטורים חלופיים

בהרצאות נמשיך עם פתרון משוואת שרדינגר עבור מערכות נוספות בעלות סיבוכיות הולכת וגדלה. נרצה להבין טוב יותר את העקרונות המובילים עבור [illegible] חלופיים. נבחן מהו הקשר בין חלופיות של אופרטורים קוונטיים לבין אי-הוודאות במדידה סימולטנית של הגדלים המדודים המתאימים.

במקרה של ~~[illegible]~~ חלקיק בקופסא תלת-ממדית ראינו כי מתקיים $\Delta x\Delta p_x\geq\frac{\hbar}{2}$ אך $\Delta x\Delta p_y=0$ וכן $\Delta x\Delta y=0$. הסיבה לכך היא ש-$\hat{x}$ ו-$\hat{p}_y$ וכן $\hat{x}$ ו-$\hat{y}$ חלופיים.

באופן כללי, אם $[\hat{A},\hat{B}]=0$ אז אי-הוודאות במדידה (סימולטנית) של $\hat{A}$ ושל B יכולה להיות מתאפסת

נוכיח זאת בשלבים (אנו מניחים כי אין ניוון):

1. אם $[\hat{A},\hat{B}]=0$ (הרמיטיים.) ומתקיים:

$$\begin{cases}\hat{A}\psi_1=a_1\psi_1\\ \hat{A}\psi_2=a_2\psi_2\end{cases}\qquad a_1\neq a_2$$

אזי $\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle=0$.

הוכחה:

$$0=\langle\psi_1|[\hat{A},\hat{B}]|\psi_2\rangle=\langle\psi_1|\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}|\psi_2\rangle=\langle\psi_1|\hat{A}\hat{B}|\psi_2\rangle-$$

$$-\langle\psi_1|\hat{B}\hat{A}|\psi_2\rangle=\langle\psi_1|\hat{A}\hat{B}|\psi_2\rangle-\langle\psi_1|\hat{B}a_2|\psi_2\rangle=$$

$$=\langle\psi_1|\hat{A}\hat{B}|\psi_2\rangle-a_2\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle$$

חשוב: כמו להפעיל את $\hat{A}$ שמאלה!

נתבונן באיבר הראשון. כיוון שהאופרטורים הרמיטיים מתקיים:

$$\langle\psi_1|\hat{A}\hat{B}|\psi_2\rangle\underset{\text{לפי הגדרה}}{=}\int\psi_1^*\hat{A}\hat{B}\psi_2\,d\tau\underset{\text{לפי הגדרה}}{\overset{\text{הרמיטיות}}{=}}\int\psi_2\left[\hat{A}\hat{B}\psi_1\right]^*d\tau\underset{[\hat{A},\hat{B}]=0\text{ לפי הנחה}}{=}\int\psi_2\left[\hat{B}\hat{A}\psi_1\right]^*d\tau=$$

$$\underset{\text{לפי הגדרה}}{=}\int\psi_2\left[\hat{B}a_1\psi_1\right]^*d\tau=a_1^*\underset{\text{לפי הגדרה}}{\int}\psi_2\left[\hat{B}\psi_1\right]^*d\tau\underset{a_1\text{ ממשי (ערכים עצמיים של אופרטור הרמיטי)}}{=}a_1\underset{\text{לפי הגדרה, }\hat{B}\text{ הרמיטי}}{\int}\psi_1^*\hat{B}\psi_2\,d\tau=$$

$$=a_1\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle$$

ולכן: $\langle\psi_1|a_1^* = \langle\psi_1|a_1$

$$0=\langle\psi_1|\hat{A}\hat{B}|\psi_2\rangle - a_2\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle = a_1\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle - a_2\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle =$$

$$=\underbrace{(a_1-a_2)}_{\neq 0}\underbrace{\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle}_{=0}$$

כלומר, אם $[\hat{A},\hat{B}]=0$ ו- ψ_1,ψ_2 עצמיים של $\hat{A}$ אזי $\underline{\underline{\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle=0}}$

2. אם $[\hat{A},\hat{B}]=0$ אז ניתן למצוא בסיס שבו גם $\hat{A}$ וגם $\hat{B}$ אלכסוניים.

- הגדרה: אופרטור $\hat{A}$ נקרא אלכסוני בבסיס $\{\psi_n\}$ אם מתקיים:

$$\langle\psi_m|\hat{A}|\psi_n\rangle \overset{n\neq m}{=} 0$$

האינטגרלים מהצורה $\langle\psi_m|\hat{A}|\psi_n\rangle$ נקראים אלמנטי מטריצה שכן ניתן לסדרם במטריצה:

$$\hat{A}=\begin{array}{c} N \\ \begin{pmatrix} \langle\psi_1|\hat{A}|\psi_1\rangle & \langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle & \cdots & \langle\psi_1|\hat{A}|\psi_N\rangle \\ \langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle & \langle\psi_2|\hat{A}|\psi_2\rangle & \cdots & \langle\psi_2|\hat{A}|\psi_N\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\psi_N|\hat{A}|\psi_1\rangle & \langle\psi_N|\hat{A}|\psi_2\rangle & \cdots & \langle\psi_N|\hat{A}|\psi_N\rangle \end{pmatrix} \end{array} N$$

כך נקראת ההצגה המטריציונית של האופרטור $\hat{A}$ בבסיס $\{\psi_n\}$.

אם אלמנטי המטריצה $\langle\psi_n|\hat{A}|\psi_m\rangle$ מתאפסים עבור $n\neq m$ אזי ההצגה המטריציונית של $\hat{A}$ בבסיס $\{\psi_n\}$ היא אלכסונית.

- הוכחה:

אופרטור הרמיטי הוא אלכסוני בבסיס המצבים העצמיים שלו $\hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$.

שכן: $\hat{A}$ הרמיטי ול-$\{\psi_n\}$ בסיס של פונקציות עצמיות.

$$\langle\psi_m|\hat{A}|\psi_n\rangle = \langle\psi_m|a_n|\psi_n\rangle = a_n\langle\psi_m|\psi_n\rangle = a_n\delta_{mn} \overset{n\neq m}{=} 0$$

כלומר, בבסיס $\{\psi_n\}$ ההצגה המטריציונית של האופרטור $\hat{A}$ היא אלכסונית:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_N \end{pmatrix}$$

בסעיף הקודם הראנו כי אם $[\hat{A},\hat{B}]=0$ אזי גם $\langle\psi_m|\hat{B}|\psi_n\rangle=0$.
כלומר, צורת ההצגה המטריציונית של האופרטור $\hat{B}$ אלכסונית בבסיס העצמי העצמיים של $\hat{A}$ $\{\psi_n\}$.

$$\hat{B}=\begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_N \end{pmatrix}$$

כך שהפונקציות $\{\psi_n\}$ הינן עצמיות לאופרטור $\hat{B}$ בהתאם עם ע"ע b_n:

$$\hat{B}|\psi_n\rangle=b_n|\psi_n\rangle$$

כלומר אם $\{\psi_n\}$ הינו הבסיס של מצבים עצמיים של האופרטור $\hat{A}$ כך שמתקיים $\hat{A}|\psi_n\rangle=a_n|\psi_n\rangle$ והאופרטור $\hat{B}$ חלופי עם $\hat{A}$ כך ש $[\hat{A},\hat{B}]=0$
אזי הבסיס $\{\psi_n\}$ עצמי גם לאופרטור $\hat{B}$: $\hat{B}|\psi_n\rangle=b_n|\psi_n\rangle$.

(3). אם $[\hat{A},\hat{B}]=0$ אז אפשר למדוד את הגדלים A ו-B סימולטנית ללא אי-ודאות.

-<u>הוכחה:</u> הראנו כי ניתן למצוא בסיס משותף של מצבים עצמיים לשני האופרטורים $\hat{A}$ ו-$\hat{B}$:

$$\begin{cases}\hat{A}|\psi_n\rangle=a_n|\psi_n\rangle \\ \hat{B}|\psi_n\rangle=b_n|\psi_n\rangle\end{cases}$$

אם הכנו את המערכת במצב $|\psi_n\rangle$ (עצמי) - $\hat{A}$ במדידת A נקבל תמיד את a_n (פוסטולט). כיוון ש-$|\psi_n\rangle$ עצמי גם ל-$\hat{B}$ אזי במדידת $\hat{B}$ נקבל תמיד את b_n.

כלומר אין אי-ודאות - בכל מדידה נקבל אותה התוצאה (עבור שני הגדלים הנמדדים) וללא התפלגות סטטיסטית של תוצאות - כלומר אי-הודאות מתאפסת.

במדידה סימולטנית של $\hat{X}$ ו- $\hat{P}_x$ לאחר המדידה אם נדע את X במדויק לא נוכל לדעת מהו $\hat{P}_x$.

אם המצב אינו עצמי $|\psi\rangle=\sum_n c_n|\psi_n\rangle$ אז בזמן המדידה פונ' הגל תקרוס לאחד המצבים העצמיים $|\psi_m\rangle$ בהסתברות $|c_m|^2$ ולאחר המדידה תוצאות המדידה של $\hat{A}$ תהיה a_m ושל $\hat{B}$ תהיה b_m ונדע את שני הגדלים במדויק בו-זמנית.