

תרגיל בית מספר 5

1. נתונה פונקציית הגל הלא מנורמלת $\psi(x) = 2\psi_0(x) + 3\psi_2(x) + i\psi_3(x)$ עבור אוסצילטור הרמוני חד-מימדי.

(א) נרמלו את פונקציית הגל.

(ב) מהי ההסתברות למדוד כל מצב?

(ג) מהו ערך התצפית של האנרגיה?

(ד) מהי ההסתברות למדוד אנרגיה גבוהה יותר מערך התצפית?

2. הוכיחו כי פונקציית הגל במצב היסוד של אוסצילטור הרמוני ופונקציית הגל המעוררת הראשונה מקיימות יחסי אורתונורמליות - כלומר, כל אחת מהן מנורמלת, והן אורתוגונליות אחת לשניה.

3. פולינומי הרמיט מקיימים את התכונה $\xi H_\nu(\xi) = \nu H_{\nu-1}(\xi) + \frac{1}{2} H_{\nu+1}(\xi)$.

(א) השתמשו בתכונה זו כדי להראות כי עבור מצבים עצמיים של המילטוניאן האוסצילטור הרמוני,

$$\hat{x}\psi_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\nu \frac{N_\nu}{N_{\nu-1}} \psi_{\nu-1} + \frac{1}{2} \frac{N_\nu}{N_{\nu+1}} \psi_{\nu+1} \right).$$

(ב) הראו כי

$$\frac{N_\nu}{N_{\nu-1}} = \sqrt{\frac{1}{2\nu}}, \quad \frac{N_\nu}{N_{\nu+1}} = \sqrt{2(\nu+1)}.$$

(ג) בעזרת הסעיפים הקודמים ויחסי האורתונורמליות $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$, מצאו את $\langle \psi_m | \hat{x} | \psi_n \rangle = \int \psi_m(x) \hat{x} \psi_n(x) dx$ בלי לבצע את האינטגרל באופן מפורש. מהו ערך התוחלת של המיקום עבור מצב עצמי?

4. חשבו את האנרגיה הקינטית $\left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle$ של המצב המעורר הראשון של אוסצילטור הרמוני.

5. המילטוניאן של אוסצילטור הרמוני דו-מימדי נתון על ידי $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$. בדומה לחלקיק בקופסא רב-מימדית, ניתן לבצע במקרה זה הפרדת משתנים.

(א) רשמו את ההמילטוניאן בצורה $\hat{H} = \hat{H}_x(x) + \hat{H}_y(y)$. מהן הפונקציות העצמיות?

(ב) מהם המספרים הקוונטיים ורמות האנרגיה המתאימות להם?

(ג) רשמו את שתי האנרגיות הנמוכות ביותר ואת הניוון שלהן.