

כימיה קוונטית תש"ע - פתרון תרגיל 5

$$L^+ = L_x + iL_y$$

$$L^- = L_x - iL_y$$

$$[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x = i\hbar L_z$$

1. לפי ההגדרה:

$$L^- L^+ = (L_x - iL_y)(L_x + iL_y) = L_x^2 + L_y^2 + iL_x L_y - iL_y L_x = L_x^2 + L_y^2 + i[L_x, L_y] = L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z$$

$$L^+ L^- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x^2 + L_y^2 - iL_x L_y + iL_y L_x = L_x^2 + L_y^2 - i[L_x, L_y] = L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$$1. \quad L_x^2 + L_y^2 = L^- L^+ + \hbar L_z$$

$$\Downarrow$$

$$L^2 = L^- L^+ + \hbar L_z + L_z^2$$

$$2. \quad L_x^2 + L_y^2 = L^+ L^- - \hbar L_z$$

$$\Downarrow$$

$$L^2 = L^+ L^- - \hbar L_z + L_z^2$$

$$L^+ Y_{l,m} = N_m^+ Y_{l,m+1}$$

2. ידוע לנו כי:

$$\langle L^+ Y_{l,m} | L^+ Y_{l,m} \rangle = N_m^+ (N_m^+)^* \langle L^+ Y_{l,m+1} | L^+ Y_{l,m+1} \rangle = |N_m^+|^2 = (N_m^+)^2$$

מצד שני:

$$\langle L^+ Y_{l,m} | L^+ Y_{l,m} \rangle = \int (L^+ Y_{l,m})^* L^+ Y_{l,m} dr = \int Y_{l,m}^* L^- L^+ Y_{l,m} dr$$

$$\left((L^+)^* = L^- \right)$$

$$L^- L^+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$

בשאלה הקודמת ראינו כי:

לכן:

$$\int Y_{l,m}^* L^- L^+ Y_{l,m} dr = \int Y_{l,m}^* (L^2 - L_z^2 - \hbar L_z) Y_{l,m} dr$$

$$L^2 Y_{l,m} = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m}; \quad L_z Y_{l,m} = \hbar m Y_{l,m}$$

$$\Downarrow$$

$$\int Y_{l,m}^* (L^2 - L_z^2 - \hbar L_z) Y_{l,m} dr = \int Y_{l,m}^* (\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m) Y_{l,m} dr =$$

$$= (\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m) \int Y_{l,m}^* Y_{l,m} dr = \hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m =$$

$$= \hbar^2 (l-m)(l+m+1)$$

$$\left(N_m^+\right)^2=\hbar^2(l-m)(l+m+1)$$

$$N_m^+=\sqrt{\hbar^2(l-m)(l+m+1)}$$

$$\Downarrow$$

$$L^+Y_{l,m}=\sqrt{\hbar^2(l-m)(l+m+1)}Y_{l,m+1}$$

עבור L^- ההוכחה דומה.