

$$f_3(x) = x(1-x)(\frac{1}{2}1-x) = (x(1-x^2))(\frac{1}{2}1-x)$$

$$= \frac{1}{2}1^2x - x^21 - \frac{1}{2}1x^2 + x^3$$

$$= x^3 - \frac{1}{2}1x^2 + \frac{1}{2}1^2x$$

$$\frac{df_3}{dx} = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}1^2$$

$$\frac{d^2f_3}{dx^2} = 6x - 31$$

$$f_4(x) = x^2(1-x)^2(\frac{1}{2}1-x) = (1-x)^2(\frac{1}{2}1x^2 - x^3)$$

$$= (1^2 - 21x + x^2)(\frac{1}{2}1x^2 - x^3)$$

$$= \frac{1}{2}1^3x^2 - 1^2x^3 - 1^2x^3 + 21x^4 + \frac{1}{2}1x^4 - x^5$$

$$= -x^5 + 2\frac{1}{2}1x^4 - 21^2x^3 + \frac{1}{2}1^3x^2$$

$$\frac{df_4}{dx} = -5x^4 + 101x^3 - 61^2x^2 + 1^3x$$

$$\frac{d^2f_4}{dx^2} = -20x^3 + 301x^2 - 121^2x + 1^3$$

$$H_{33} = \langle f_3 | H | f_3 \rangle = \langle f_3 | -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} | f_3 \rangle$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{2}1x^2 + \frac{1}{2}1^2x) (6x - 31) dx$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^1 (6x^4 - 31x^3 - 91x^3 + 4\frac{1}{2}1^2x^2 + 31^2x^2 - \frac{1}{2}1^3x) dx$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{6x^5}{5} - \frac{31x^4}{4} - \frac{91x^4}{4} + 4\frac{51^2x^3}{3} + \frac{31^2x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{1^3x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{6}{5}1^5 - \frac{31}{4}1^5 - \frac{91}{4}1^5 + \frac{4}{3}51^2 + 1^5 - \frac{1}{2}1^5 \right] =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{72 - 45 - 135 + 90 + 60 - 45}{60} \right) = \frac{\hbar^2}{40m} //$$

$$H_{34} = \langle f_3 | H | f_4 \rangle = \langle f_3 | -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} | f_4 \rangle$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L (x^3 - \frac{1}{2}Lx^2 + \frac{1}{6}L^2x) (-20x^3 + 30Lx^2 - 12L^2x + L^3) dx$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{20x^7}{7} + \frac{30Lx^6}{6} - \frac{12L^2x^5}{5} + \frac{L^3x^4}{4} + \right. \\ \left. + \frac{30Lx^6}{6} - \frac{45L^2x^5}{5} + \frac{18L^3x^4}{4} - \frac{1}{2} \frac{L^4x^3}{3} \right. \\ \left. - \frac{10L^2x^5}{5} + \frac{15L^3x^4}{4} - \frac{6L^4x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{L^5x^2}{2} \right]_0^L$$

$$= -\frac{\hbar^2 L^7}{2m} \left(-\frac{20}{7} + 5 - \frac{12}{5} + \frac{1}{4} + 5 - 9 + \frac{18}{4} - \frac{1}{2} - 2 + \frac{15}{4} - 2 + \frac{1}{4} \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2 L^7}{2m} \left(-\frac{20}{7} + \frac{35}{4} - \frac{12}{5} - \frac{1}{2} - 3 \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2 L^7}{2m} \left(\frac{-800 + 2450 - 672 - 140 - 840}{280} \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2 L^7}{2m} \left(\frac{-2}{280} \right) = \frac{\hbar^2 L^7}{m 280} \quad \checkmark$$

$$H_{44} = \langle f_4 | H | f_4 \rangle = \langle f_4 | -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} | f_4 \rangle$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L (-x^5 + 2\frac{1}{2}Lx^4 - 2L^2x^3 + \frac{1}{2}L^3x^2) \cdot (-20x^3 + 30Lx^2 - 12L^2x + L^3) dx$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{20x^9}{9} - \frac{30Lx^8}{8} + \frac{12L^2x^7}{7} - \frac{L^3x^6}{6} \right. \\ \left. - \frac{50Lx^8}{8} + \frac{75L^2x^7}{7} - \frac{30L^3x^6}{6} + \frac{2\frac{1}{2}L^4x^5}{5} \right. \\ \left. + \frac{40L^2x^7}{7} - \frac{60L^3x^6}{6} + \frac{24L^4x^5}{5} - \frac{2L^5x^4}{4} \right. \\ \left. - \frac{10L^3x^6}{6} + \frac{15L^4x^5}{5} - \frac{6L^5x^4}{4} + \frac{1}{2} \frac{L^6x^3}{3} \right]_0^L$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} L^9 \left(\frac{20}{9} - \frac{30}{8} + \frac{12}{7} - \frac{1}{6} - \frac{50}{8} + \frac{75}{7} - 5 + \frac{1}{2} + \frac{40}{7} - \frac{10}{6} + \frac{24}{5} - \frac{1}{2} \right. \\ \left. - \frac{10}{6} + 3 - \frac{6}{4} + \frac{1}{6} \right) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{20}{9} - 10 + \frac{127}{2} - \frac{10}{6} + \frac{24}{5} - \frac{6}{4} - 12 \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{5}{252} - \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + 0 \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{115}{1260} \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{-1}{630} = \frac{\hbar^2}{1260m} \quad \checkmark$$

$$S_{33} = \langle f_3 | f_3 \rangle = \int_0^L (x^3 - \frac{1}{2}Lx^2 + \frac{1}{2}L^2x) (x^3 - \frac{1}{2}Lx^2 + \frac{1}{2}L^2x) dx$$

$$= \left[\frac{x^7}{7} - \frac{1}{2}L \frac{x^6}{6} + \frac{1}{2} \frac{L^2 x^5}{5} - \frac{1}{2}L \frac{x^6}{6} + 2 \frac{1}{4} \frac{L^2 x^5}{5} - 3 \frac{1}{4} \frac{L^3 x^4}{4} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{L^2 x^5}{5} - 3 \frac{1}{4} \frac{L^3 x^4}{4} + \frac{1}{4} \frac{L^4 x^3}{3} \right]_0^L$$

$$= L^7 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{9}{20} - \frac{3}{16} + \frac{1}{10} - \frac{3}{16} + \frac{1}{12} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{20} - \frac{6}{16} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} \right)$$

$$= L^7 \left(\frac{9 \times 21 - 6 \cdot 20 \cdot 4 + 60 - 210 + 84 + 35}{420} \right)$$

$$= \frac{1}{840} L^7 \quad \checkmark$$

$$S_{34} = \langle f_3 | f_4 \rangle = \int_0^L (x^3 - \frac{1}{2}Lx^2 + \frac{1}{2}L^2x) (-x^5 + 2\frac{1}{2}Lx^4 - 2L^2x^3 + \frac{1}{2}L^3x^2) dx$$

$$= -\frac{x^9}{9} + 2\frac{1}{2}L \frac{x^8}{8} - 2L^2 \frac{x^7}{7} + \frac{1}{2} \frac{L^3 x^6}{6} \\ + \frac{1}{2}L \frac{x^8}{8} - 3\frac{3}{4} \frac{L^2 x^7}{7} + 3 \frac{L^3 x^6}{6} - \frac{3}{4} \frac{L^4 x^5}{5} \\ - \frac{1}{2}L^2 \frac{x^7}{7} + \frac{1}{4} \frac{L^3 x^6}{6} - \frac{L^4 x^5}{5} + \frac{1}{4} \frac{L^5 x^4}{4} \Big|_0^L$$

$$= L^9 \left(-\frac{1}{9} + \frac{5}{16} - \frac{2}{7} + \frac{1}{12} + \frac{3}{16} - \frac{15}{28} + \frac{1}{2} - \frac{3}{20} - \frac{1}{4} + \frac{5}{24} - \frac{1}{5} + \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{5040} L^9 \quad \checkmark$$

$$S_{44} = \langle f_4 | f_4 \rangle = \int_0^L (-x^5 - 2\frac{1}{2}Lx^4 - 2L^2x^3 + \frac{1}{2}L^3x^2)(x^5 + 2\frac{1}{2}Lx^4 - 2L^2x^3 + \frac{1}{2}L^3x^2) dx$$

$$= \frac{x^{11}}{11} - \frac{5Lx^{10}}{2 \cdot 10} + \frac{2L^2x^9}{9} - \frac{1L^3x^8}{8}$$

$$- \frac{5Lx^{10}}{2 \cdot 10} + \frac{25L^2x^9}{4 \cdot 9} - \frac{5L^3x^8}{8} + \frac{5L^4x^7}{4}$$

$$+ 2L\frac{2}{9}x^9 - 5L\frac{3}{8}x^8 + 4L\frac{4}{7}x^7 - \frac{L^5x^6}{6}$$

$$- \frac{1}{2}L\frac{3}{8}x^8 + \frac{5}{4}L\frac{4}{7}x^7 - \frac{L^5x^6}{6} + \frac{1}{4}L\frac{6}{5}x^5 \Big|_0^L$$

$$= L'' \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{25}{36} - \frac{5}{8} + \frac{5}{28} \right.$$

$$\left. + \frac{2}{9} - \frac{5}{8} + \frac{4}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{16} + \frac{5}{28} - \frac{1}{6} + \frac{1}{20} \right)$$

$$= L'' \left(\frac{1}{1584} - \frac{1}{504} + \frac{1}{504} - \frac{1}{1680} \right) = \frac{L''}{27720}. \quad \checkmark$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 L^5}{40m} & \frac{\hbar^2 L^7}{280m} \\ \frac{\hbar^2 L^7}{280m} & \frac{\hbar^2 L^9}{1260m} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{L^7}{840} & \frac{L^9}{5040} \\ \frac{L^9}{5040} & \frac{L''}{27720} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\det = \begin{vmatrix} \frac{\hbar^2 L^5}{40m} - \frac{L^7}{840} E' & \frac{\hbar^2 L^7}{280m} - \frac{L^9}{5040} E' \\ \frac{\hbar^2 L^7}{280m} - \frac{L^9}{5040} E' & \frac{\hbar^2 L^9}{1260m} - \frac{L''}{27720} E' \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{h^2 L^5}{40m} - \frac{L^7}{840} E'\right) \left(\frac{h^2 L^9}{1260m} - \frac{L^{11}}{27720} E'\right)$$

$$= \frac{h^4 L^{14}}{50400m^2} - \frac{h^2 L^{16} E'}{1108800m} - \frac{h^2 L^{16} E'}{1058400m} + \frac{L^{18} E'^2}{2328480}$$

$$= \left(\frac{h^2 L^7}{280m} - \frac{L^9 E'}{5040}\right)^2$$

$$= \frac{h^4 L^{14}}{78400m^2} - \frac{2h^2 L^{16} E'}{1411200m} + \frac{L^{18} E'^2}{25401600}$$

$$50h^2 L^{14} - 22.909h^2 L^{16} E' m - 24L^{16} E' h^2 m + 1.0909L^{18} E' m^2$$

$$= 324 h^4 L^{14} - 36 h^2 L^{16} E' m + L^{18} E'^2 m^2$$

$$0.0909L^{18} E'^2 m^2 - 10.909h^2 L^{16} E' m + 180h^4 L^{14} = 0$$

$$\frac{10.909h^2 L^{16} m \pm \sqrt{119.008h^4 L^{32} E'^2 m^2 - 65.4545E'^2 m^2 L^{32} h^4}}{0.181818 m^2 L^{18}}$$

↓

$$E'_2 = \frac{10.909h^2 L^{16} m - 7.318h^2 L^{16} m}{0.181818 m^2 L^{18}} = \frac{19.75 h^2}{m L^2} \checkmark$$

$$E'_4 = \frac{10.909h^2 L^{16} m + 7.318h^2 L^{16} m}{0.181818 m^2 L^{18}} = \frac{100.24 h^2}{m L^2} \checkmark$$

$$E_2 = \frac{h^2 \pi^2 n^2}{2 m l^2} = \frac{19.73 h^2}{m l^2}$$

b. הסדרים האנטיים

$$E_4 = \frac{78.95 h^2}{m l^2}$$

אטור E_2 קיבלני ערך קרוב מאוד לערך המצוי "ק" 0.11%
 שגיאה. אטור E_4 , אנרגיה צמודה יותר, אומדן
 הישגיאה גדול יותר אך זה תואם את אורח השמה פשוט
 שגיאתנו נחשה אטור הפונ' (הנצלות) אחי' שגיאה: ידג.

c. זו היספני את הפונ' $f_5(x) = x^3(1-x)^3$ עמכים

הערכים שקיבלני אטור E' ע' היינו משתנים. $f_5(x)$

הינה פונ' כימטרית ואילו הערכים שטו אטורני היא

הערכים של הפונ' היא סימטריות אטור חלקיק, מקופסא.

אינטגרלי ההפיפה היו וותלפטים ו' (הפיפה שלמהחילה

הפרצני את הפצה עפון סימטריות וא-סימטריות

d. זו היספני את הפונ' $f_6(x) = x^3(1-x)^3(1-x)^3$ עמכים היינו

מחפשים אצ' ברצ' חופש עפתרון אכך משפדים את

תוצאות החישוב אטור E' רק שתייה קרובה יותר

עפתרון האמת, $f_6(x)$ היא פונ' אסימטרית אכך

תואת עגור הפנ' העטים.