

КВАНТОВЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М. Я. Азбель, Н. Б. Брандт, Р. Г. Минц

Рассмотрен электронный газ в слабо неоднородном магнитном поле. Получено выражение для возникающей при этом разности потенциалов. Показано, что для полуметаллов разность потенциалов имеет измеримую величину.

1. Движение электронов в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим движение электронов проводимости в слабо неоднородном магнитном поле ($R \ll \delta$, где R — радиус орбиты электрона, δ — характерный размер изменения магнитного поля). Пусть при этом сечения поверхности Ферми плоскостью $(p_H) / H = p_H = \text{const}$ финитны в процессе движения. Тогда, как известно [1], движение электронов можно представить как финитное движение вокруг центра орбиты, движение центра орбиты вдоль магнитного поля и его дрейф перпендикулярно магнитному полю. Скорость дрейфового движения равна среднему (по периоду обращения вокруг центра орбиты) значению скорости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, отлична от нуля только в неоднородном магнитном поле и по порядку величины есть $V_{др} \sim V_F R / \delta$. Величина $S(\varepsilon, p_H) / H$, где $S(\varepsilon, p_H)$ — площадь сечения поверхности $\varepsilon = \text{const}$ плоскостью $p_H = \text{const}$, является адиабатическим инвариантом при движении электрона в однородном магнитном поле. Если $R / \delta \ll 1$, то дрейфовый сдвиг центра орбиты за период обращения $\Delta_{др} \sim R^2 / \delta \ll \delta$, сдвиг центра орбиты вдоль магнитного поля $\Delta_H \sim R \ll \delta$. Поэтому магнитное поле и p_H можно рассматривать как медленно меняющиеся параметры движения. Таким образом, величина S / H является адиабатическим инвариантом в слабо неоднородном магнитном поле [1].

Квантование уровней энергии электрона происходит аналогично квантованию в однородном магнитном поле и зависит от координат как от параметра.

2. Термодинамика электронного газа в неоднородном магнитном поле

Химический потенциал электронного газа зависит от полного числа частиц N и является функционалом от неоднородного магнитного поля, в термодинамическом равновесии он постоянен вдоль образца. Химический потенциал можно представить в виде $\zeta = \varepsilon_0 + \delta\zeta$, где $\delta\zeta = \delta\zeta\{H\}$ — часть химического потенциала, зависящая от распределения магнитного поля, ε_0 — энергия Ферми. Пусть, для простоты, $l \ll \delta$, где l — длина свободного пробега электронов. Разобьем образец на области с размером d , где $l \ll d \ll \delta$. В силу сделанных предположений, в каждой из этих областей можно ввести химический потенциал $\zeta_{\text{лок}}$, а магнитное поле считать постоянным. Введенная таким образом величина $\zeta_{\text{лок}}$ есть функция числа частиц и магнитного поля. Аналогично сделанному выше $\zeta_{\text{лок}}$ можно пред-

ставить в виде $\zeta_{\text{лок}} = \varepsilon_0 + \delta\zeta_{\text{лок}}$, где $\delta\zeta_{\text{лок}}(n, H)$ — функция числа частиц и магнитного поля, а следовательно, функция координат.

В термодинамическом равновесии химический потенциал постоянен вдоль образца, что приводит к равенству $\delta\zeta_{\text{лок}}(r) = \delta\zeta\{H\} = \text{const}$. Величина $\delta\zeta_{\text{лок}}(n, H)$ может оставаться постоянной вдоль образца только при условии, что число частиц в единице объема зависит от координат. При этом ясно, что

$$n - n(\varepsilon_0) = \delta n \approx -\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} [\delta\zeta_{\text{лок}}(n, H) - \delta\zeta].$$

Это обстоятельство приводит к появлению нескомпенсированной плотности заряда

$$\rho' \approx e \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} [\delta\zeta_{\text{лок}}(n_0, H) - \delta\zeta].$$

Некомпенсированная плотность заряда создает электрическое поле $\varphi(r)$, которое, в свою очередь, меняет распределение числа частиц на величину

$$\delta n \approx -\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} e\varphi, \quad \rho' = \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} e^2 \varphi$$

и т. д.

Чтобы получить самосогласованное решение задачи, нужно одновременно включить в рассмотрение неоднородное магнитное поле и электрическое поле $\varphi(r)$, из термодинамического расчета получить плотность нескомпенсированного заряда $\rho' = \rho'(\varphi, H)$ и решить уравнение Пуассона для φ : $\Delta\varphi = -4\pi\rho'(\varphi, H)$.

Остановимся на решении последнего уравнения подробнее. Из предыдущих оценок получаем, что $4\pi\rho' = \lambda^2\{\varphi + e^{-1}\delta\zeta_{\text{лок}}\}$, где φ перенормировано на постоянную величину $\delta\zeta$ ($\varphi \rightarrow \varphi - e^{-1}\delta\zeta$), а $\lambda^2 = 4\pi e^2 \partial n / \partial \varepsilon \sim \sim 1/a^2$ ($a \sim 1/n_0^{1/3}$). Тогда

$$\Delta\varphi + \lambda^2\varphi = -\lambda^2 e^{-1} \delta\zeta_{\text{лок}}.$$

В левой части уравнения член с $\Delta\varphi \sim \varphi/\delta^2$ много меньше члена $\lambda^2\varphi \sim \varphi/a^2$, так как $(a/\delta)^2 \ll 1$. Поэтому уравнение приобретает вид $\lambda^2\varphi = -\lambda^2 e^{-1} \delta\zeta_{\text{лок}}$, откуда с точностью до $(a/\delta)^2$ получаем, что

$$e\varphi \approx -\delta\zeta_{\text{лок}} \sim \hbar\Omega (\hbar\Omega/\varepsilon_0)^{1/2},$$

где Ω — циклотронная частота обращения в магнитном поле. Это показывает, что $\rho' = 0$ с точностью $(a/\delta)^2$ (ср. [2]), а уравнение $\rho' = 0$ с той же точностью эквивалентно уравнению $\Delta\varphi = -4\pi\rho'$. Таким образом, для нахождения φ можно воспользоваться уравнением $\rho' = 0$. Приступим теперь к решению задачи.

3. Определение разности потенциалов в неоднородном магнитном поле

Согласно сказанному в предыдущем разделе, электрический потенциал $\varphi(r)$, возникающий в неоднородном магнитном поле, следует искать из условия электронейтральности $\rho' = 0$ или $n(r) = n(\varepsilon_0)$ (магнитострикцией пренебрегаем), где

$$n(r) = \frac{\delta N}{\delta V} = \frac{\delta}{\delta V} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}$$

¹⁾ Для хороших металлов величина $a \sim 10^{-8}$ см, для полуметаллов $a \sim 10^{-7} \div 10^{-6}$ см; в полях $H \sim 10^4$ э имеем $R \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ см, а следовательно, $\delta \gtrsim 10^{-2}$ см. Таким образом, $(a/\delta)^2 \lesssim 10^{-12} \div 10^{-8}$, что значительно превышает точность дальнейших вычислений.

Однако в случае слабо неоднородного магнитного поля вычисление любой термодинамической величины существенно упрощается. Можно воспользоваться соответствующим результатом, полученным для однородного поля. При этом следует химический потенциал $\zeta_{\text{одн}}$ заменить на $\zeta - e\varphi$. Химический потенциал можно представить в виде $\zeta = \varepsilon_0 + \delta\zeta\{H\}$. Тогда во все формулы входит комбинация $\varepsilon_0 - e\varphi + \delta\zeta\{H\}$. Потенциал электрического поля определен с точностью до произвольной постоянной, в которую можно включить и величину $\delta\zeta\{H\}$. Таким образом, для получения термодинамической величины в слабо неоднородном поле следует в соответствующей величине для случая однородного поля заменить химический потенциал на $\varepsilon_0 - e\varphi$, а объем V на интеграл по объему.

Воспользовавшись этим, имеем

$$n(\varepsilon_0) = n(\varepsilon_0 - e\varphi, H), \quad n(\zeta, H) = n(\zeta) + \widetilde{\Delta n}(\zeta, H),$$

где [3]

$$\widetilde{\Delta n}(\zeta, H) = - \sum_m \frac{dS_m}{d\zeta} \frac{1}{S_m} (H \bar{M}_m),$$

$$\bar{M}_m = - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \pi^2 \hbar^3} \left(\frac{e\hbar H}{c} \right)^{3/2} \left(\frac{\partial^2 S_m}{\partial p_z^2} \right)^{-1/2} \frac{S_m}{H} \left(\frac{dS_m}{d\zeta} \right)^{-1}.$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi(k\lambda)}{k^{3/2}} \sin \left\{ \frac{kcS_m}{e\hbar H} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k\gamma \right\} \cos \left(\frac{k}{2m_0} \frac{dS_m}{d\zeta} \right),$$

S_m — экстремальное сечение поверхности Ферми, $\bar{M}_m$ — магнитный момент m -й группы электронов. Отметим, что в выражении для $n(\zeta, H)$ мы пренебрегли неосциллирующими диамагнитными и парамагнитными членами в силу их малости при низких температурах [3].

Так как $e\varphi / \hbar\Omega \ll 1$ (см. предыдущий раздел), то под знаком синуса величину $S_m(\varepsilon_0 - e\varphi)$ можно положить равной $S_m(\varepsilon_0)$. Тогда имеем

$$n(\varepsilon_0 - e\varphi) + \widetilde{\Delta n}(\varepsilon_0, H) = n(\varepsilon_0),$$

$$\varphi = - \frac{1}{e v(\varepsilon_0)} \sum_m \frac{dS_m}{d\zeta} \frac{1}{S_m} (H \bar{M}_m),$$

где $v(\varepsilon)$ — плотность состояний.

Так как физический смысл имеет лишь разность потенциалов, то окончательно получим

$$e\Delta\varphi = - \frac{1}{v(\varepsilon_0)} \sum_m \frac{dS_m}{d\zeta} \frac{1}{S_m} \{ (\bar{M}_m H) |_{r_2} - (\bar{M}_m H) |_{r_1} \}.$$

Оценим теперь по порядку величины полученный результат. Величина $v(\varepsilon_0)$ определяется в основном электронами с наибольшей массой m_{max}^*

$$v(\varepsilon_0) \sim (m_{\text{max}}^*)^{3/2} \varepsilon_0^{1/2} \hbar^{-3};$$

$(\bar{M}_m H)$ определяется электронами с наименьшей массой (из-за множителя $\exp\{-\pi^2 T / \hbar\Omega\}$) и

$$(\bar{M}_m H) \sim \frac{\varepsilon_0}{\hbar^3} \left(\frac{e\hbar H}{c} \right)^{3/2}$$

(см. [3]). Величина $S_m^{-1} dS_m / d\zeta \sim 1 / \varepsilon_0$. Таким образом,

$$e\Delta\varphi \sim \hbar\Omega_{\text{min}} (\hbar\Omega_{\text{min}} / \varepsilon_0)^{1/2},$$

$$\Omega_{\text{min}} = \frac{eH}{m_{\text{max}}^* c}, \quad \frac{e\Delta\varphi}{\hbar\Omega_{\text{min}}} \sim \left(\frac{\hbar\Omega_{\text{min}}}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \ll 1.$$

Из оценок видно, что период осцилляций определяется электронами с наименьшей массой, а амплитуда осцилляций определяется электронами с наибольшей массой.

Если поле $H \sim 10^4$ э, то для полуметаллов типа Ві имеем $\Delta\varphi \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$ в, что является вполне измеримой величиной. Для нормальных металлов при $H \sim 10^4$ э, $\Delta\varphi \sim 10^{-8} \div 10^{-7}$ в.

По полученной величине потенциала $\varphi(r)$ можно определить плотность нескомпенсированного заряда ρ' с помощью уравнения $\Delta\varphi = -4\pi\rho'$. Легко получить, что по порядку величины $\rho' \sim (a/\delta)^2(\epsilon_0/\hbar\Omega)^{1/2}\rho_0$.

Институт теоретической физики
Академии наук СССР
Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
28 октября 1968 г.

Литература

- [1] Н. М. Лифшиц, А. А. Служкин, В. М. Набутовский. ЖЭТФ, 41, 939, 1961.
- [2] М. Я. Азбель, В. Г. Несчанский. ЖЭТФ, 49, 572, 1965.
- [3] Н. М. Лифшиц, А. М. Косевич. ЖЭТФ, 29, 730, 1955.

POTENTIAL DIFFERENCE QUANTUM OSCILLATIONS IN A NONUNIFORM MAGNETIC FIELD

M. Ya. Azbel, N. B. Brandt, R. G. Mintz

An electron gas in a weakly inhomogeneous magnetic field is considered. The potential difference which appears in this case is determined. It is shown that for a semi-metal the potential difference is a measurable quantity.