פתרון תרגיל 6

1) א) $\begin{cases} u''+u=|\cos 2x| \\ u(0)=0,\ u(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

פתרון המד"ר ההומוגנית ($u''+u=0$) הוא:

$$u=c_1\underbrace{\cos x}_{\varphi_2(x)}+c_2\underbrace{\sin x}_{\varphi_1(x)}$$

$\varphi_1(x)$ מקיימת תנאי שמאלי ($\varphi_1(0)=0$) ו- $\varphi_2(x)$ מקיימת תנאי ימני, לכן לפי טענה שהוכחנו בכיתה $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ הם פתרונות יסודיים. נכתוב באופן כללי:

$$g(x,s)=\begin{cases} A\sin x, & x\le s \\ B\cos x, & x\ge s \end{cases}$$

נדרוש רציפות: $A\sin(s)=B\cos(s)$

בבעיה זו $p(x)=1$ לכן תנאי על הנגזרות מקבל את הצורה:

$$1\cdot(-B\sin(s)-A\cos(s))=1 \ /\cdot\sin(s)$$

$$-B\sin^2(s)-A\sin(s)\cos(s)=\sin(s)$$

תנאי הרציפות

$$\Rightarrow -B\sin^2(s)-B\cos^2(s)=\sin(s)$$

$$\Rightarrow B=-\sin(s)$$

$$A=-\cos(s)$$

אם כן פונ' גרין היא:

$$g(x,s)=\begin{cases} -\sin(x)\cos(s), & x\le s \\ -\cos(x)\sin(s), & x\ge s \end{cases}$$

נפתור את המד"ר:

$$u(x)=\int_0^{\pi/2}|\cos(2s)|g(x,s)ds\overset{(*)}{=}-\cos x\int_0^x|\cos(2s)|\sin(s)ds-$$

(*) יש להפריד בין $x\le s$ לבין $x\ge s$

$$-\sin(x)\int_x^{\pi/2}|\cos(2s)|\cos(s)ds=\cos x\int_0^x(2\cos^2(s)-1)d(\cos(s))-$$

$$-\sin(x)\int_x^{\pi/4}(1-2\sin^2(s))d(\sin(s))+\sin(x)\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1-2\sin^2(s))d(\sin(s))=$$

יש גם שני מקרים:
1. $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$
2. $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

$$=\ldots=\frac{2}{3}\cos^4(x)-\cos^2(x)+\frac{1}{3}\cos(x)-\sin(x)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sin^2(x)-\frac{2}{3}\sin^4(x)+\frac{1}{3}\sin(x)$$

זה פתרון עבור $x\le\frac{\pi}{4}$. יש לפתור בנפרד עבור $x\ge\frac{\pi}{4}$ (בגלל סימן)

① ב)
$$\begin{cases} u''-u=1 \\ u(0)=0\ ,\ u'(1)=0 \end{cases}$$

הפתרון הכללי של המד"ר ההומ׳ : $u=Ae^{x}+Be^{-x}$

ונמצא $\varphi_1(x)$ המקיימת תנאי שמאלי:

$$\varphi_1(0)=0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-B \ = \ \varphi_1(x)=A(e^{x}-e^{-x})$$

או $\varphi_1(x)=A2\sinh(x)$.

ונמצא $\varphi_2(x)$ המקיימת תנאי ימיני:

$$\varphi_2'(1)=0 \Rightarrow Ae-\frac{B}{e}=0 \Rightarrow B=Ae^{2}$$

$$\varphi_2(x)=B(e^{x}+e^{2-x}).$$

כלומר,

$$\boxed{\sinh x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})}$$

$$\Rightarrow g(x,s)=\begin{cases} A\,\cancel{\sinh(x)}\,(e^{x}-e^{-x})\ ,\ x\le s \\ B(e^{x}+e^{2-x})\ ,\ x\ge s \end{cases}$$

נדרוש רציפות:

$$\begin{cases} B(e^{s}+e^{2-s})=A(e^{s}-e^{-s}) \\ B(e^{s}-e^{2-s})-A(e^{s}+e^{-s})=1 \end{cases}$$

וכאן וכן לגבי תנאי של הנגזרת: $=1$

מתנאים אלו נקבל:

$$2e^{s}(B-A)=1$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{2}e^{-s}+A$$

עוד קצת "התעמלות" אלגברית ולבסוף נקבל:

$$A=-\frac{e^{s}+e^{2-s}}{2(e^{2}+1)}\ ,\qquad B=-\frac{2\sinh(s)}{e^{2}+1}$$

$$\Rightarrow g(x,s)=\begin{cases} -\dfrac{e^{s}+e^{2-s}}{e^{2}+1}\,\cancel{\sinh(x)}\,(e^{x}-e^{-x})\ ,\ x\le s \\ -\dfrac{\cancel{\sinh(s)}\,(e^{s}-e^{-s})}{e^{2}+1}(e^{x}+e^{2-x})\ ,\ x\ge s \end{cases}$$

ונמצא את הפתרון המד"ר (הלא הומוגנית):

$$u=\int_0^1 \underbrace{f(s)}_{=1} g(x,s)\,ds=-\frac{e^{x}+e^{2-x}}{e^{2}+1}\int_0^x 2\sinh(s)\,ds-\frac{2\sinh(x)}{e^{2}+1}\int_x^1 (e^{s}+e^{2-s})\,ds=$$

$$=-\frac{e^{x}+e^{2-x}}{e^{2}+1}\,2(\cosh(x)-1)-\frac{2\sinh(x)}{e^{2}+1}(e-e-e^{x}+e^{2-x})=$$

$$=\left[\frac{1}{e^{2}+1}\left(e^{x}+e^{2-x}-(e^{x}+e^{2-x})\frac{(e^{x}+e^{-x})}{2}+(e^{x}-e^{2-x})\frac{(e^{x}-e^{-x})}{2}\right)\right]\cdot 2=$$

$$=\frac{2}{e^{2}+1}\left(e^{x}+e^{2-x}-1-e^{2}\right)=\left[\frac{e^{x}+e^{2-x}}{e^{2}+1}-1\right]\cdot 2$$

2) א) $\begin{cases} u''-2u+\lambda u=0 \\ u(0)=0 \quad u(1)=0 \end{cases}$

$\underline{\lambda>2}$: $u=A\cos(\sqrt{\lambda-2}\,x)+B\sin(\sqrt{\lambda-2}\,x)$

$A=u(0)=0 \Rightarrow u=B\sin(\sqrt{\lambda-2}\,x)$

$\Rightarrow B\sin(\sqrt{\lambda-2})=u(1)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda-2}=n\pi,\ n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \lambda=n^2\pi^2+2,\ n\in\mathbb{N}$

$\underline{\lambda=2}$: $u=Ax+B$ ולא ניתן לקיים תנאי שפה

לכן אין פתרון. (פתרון טריוויאלי בלבד).

$\underline{\lambda<2}$: $u=A\cosh(\sqrt{2-\lambda}\,x)+B\sinh(\sqrt{2-\lambda}\,x)$

$A=u(0)=0 \Rightarrow u=B\sinh(\sqrt{2-\lambda}\,x)$

$\Rightarrow B\sinh(\sqrt{2-\lambda})=u(1)=0 \Rightarrow B=0$

לכן פתרון טריוויאלי בלבד ואין ערכים עצמיים.

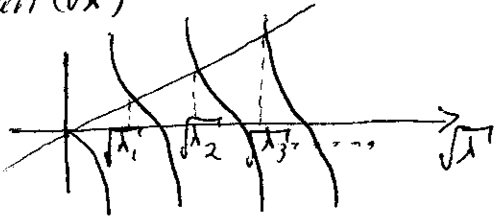
ב) $\begin{cases} u''+\lambda u=0 \\ u(0)=0,\ u'(1)+u(1)=0 \end{cases}$

$\underline{\lambda>0}$: $u=A\cos(\sqrt{\lambda}\,x)+B\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

$A=u(0)=0 \Rightarrow u=B\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda})+B\sin(\sqrt{\lambda})=u'(1)+u(1)=0$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}=-\tan(\sqrt{\lambda})$



ציור

$\underline{\lambda=0}$: $u=Ax+B$

ולא ניתן לקיים תנאי שפה. (פתרון טריוויאלי בלבד)

$\underline{\lambda<0}$: $u=A\cosh(\sqrt{-\lambda}\,x)+B\sinh(\sqrt{-\lambda}\,x)$

$A=u(0)=0 \Rightarrow u=B\sinh(\sqrt{-\lambda}\,x)$

$\Rightarrow \sqrt{-\lambda}B\cosh(\sqrt{-\lambda})+B\sinh(\sqrt{-\lambda})=u'(1)+u(1)=0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}=-\tanh(\sqrt{-\lambda})$

ומתקבל פתרון <u>יחיד</u>! (אפשר לצייר או לפתור נומרית)

ג) $f(x)=x-1$ לא מקיימת תנאי שפה בקטע $[0,\pi]$ ולכן [illegible] לא רציפות של f.

ד) $u(x)=x-2$ לא מקיימת תנאי שפה בקטע $[0,\pi]$ " " " " " ".

③ כתקרני בשיעור.

④

א) $\begin{cases} ((x^2-1)u')' + xu = 0 \\ u'(0) - u(0) = 0 \\ 2u'(1) = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} Lu = ((x^2-1)u')' + xu \\ p(x) = x^2-1 \end{array} \right)^*$

$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = [$ כמו במשפט $] = p(1)[u'(1)\bar{v}(1) - \bar{v}'(1)u(1)] -$

$- p(0)[u'(0)\bar{v}(0) - \bar{v}'(0)u(0)] = u'(0)\bar{v}(0) - \bar{v}'(0)u(0) = 0$

$p(1)=0$, $p(0)=1$; מתנאי שפה שמאלי

$\Longleftarrow$ הבעיה צמודה לעצמה.

ב) $\begin{cases} Lu = (\cos(x)u')' + \sin x u = 0 \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) - u(1) = 0 \end{cases}$

$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = \cos(1)[u'(1)\bar{v}(1) - \bar{v}'(1)u(1)] -$

$-[u'(0)\bar{v}(0) - \bar{v}'(0)u(0)] = \cos(1)\underbrace{[u(1)\bar{v}(1) - \bar{v}(1)u(1)]}_{=0} - [u'(0)\bar{v}(0) - \bar{v}'(0)u(0)]$

עפ"י תנאי ימני

$= 0.$ לפי תנאי שמאלי $\Rightarrow$ הבעיה צמודה לעצמה.

ג) $\begin{cases} u'' + u' = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ ללא צמוד, לעצמה.

$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = \int_0^1 (u''+u')\bar{v} - (\bar{v}''+\bar{v}')u)\,dx =$

אינטגרציה בחלקים $= \underbrace{[u'\bar{v} + u\bar{v} - \bar{v}'u - \bar{v}u]_0^1}_{=0 \text{ (עפ"י תנאי שפה)}} - \int_0^1 (\cancel{u'\bar{v}'} + u\bar{v}' - \cancel{\bar{v}'u'} - \bar{v}u')\,dx =$

$= -\int_0^1 (u\bar{v}' - \bar{v}u')\,dx = -\int_0^1 u^2 \left(\frac{\bar{v}}{u}\right)' dx \overset{*}{\neq} 0$

(*) חשוב משפט על $L = L^*$ $\Longleftrightarrow$ $a(x) \equiv 0$.

בהוכחת המשפט מקבלים את האינטגרל האחרון עם פקטור $a(x)$ באינטגרנד ובמקרה שלנו $a(x) = 1$, כלומר $L \neq L^*$ ולכן הבעיה אינה צמודה לעצמה.

הכול נכון, אבל ההוכחה מיותרת:
מספיק להשתמש במשפט מההרצאה

הגדרה
$(p(x)u')' + q(x)u = 0$ - צמוד לעצמו $\Longleftrightarrow$
+ תנאי שפה סטנדרטיים