

4 פרקון תרגיל

① $\cos^2(x)y'' + \frac{1}{2}\sin(3x - \frac{3\pi}{2})y' - \frac{1}{2}y = 0$ גא'ת:

$\frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{\cos^2(x)}$: כפי'ן, ולן $\frac{\pi}{2}$ ב'ב' (פרק א' ו'ב' ח'ת) $(\frac{\pi}{2})$

$(x - \frac{\pi}{2})^2 y'' + (x - \frac{\pi}{2}) \cdot \underbrace{\frac{(x - \frac{\pi}{2}) \sin(3x - \frac{3\pi}{2})}{2 \cos^2 x}}_{a(x)} y' - \underbrace{\frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2 \cos^2 x}}_{b(x)} y = 0$

$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$

$a_0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2}) \sin(3x - \frac{3\pi}{2})}{2 \cos^2 x} = \frac{3}{2}$
פ'נ'ס'ן

$b_0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(- \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2 \cos^2 x} \right) = -\frac{1}{2}$
פ'נ'ס'ן

$\lambda^2 + (\frac{3}{2} - 1)\lambda - \frac{1}{2} = 0$

א'ן הנשואה האוס'ן'ת:

$\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ארש'ם א'וס'ן'ת:

ק'ב'לו $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ ולן :

$y_1 = (x - \frac{\pi}{2})^{-1} (1 + c_1(x - \frac{\pi}{2}) + c_2(x - \frac{\pi}{2})^2 + \dots)$

$y_2 = (x - \frac{\pi}{2})^{1/2} (1 + d_1(x - \frac{\pi}{2}) + d_2(x - \frac{\pi}{2})^2 + \dots)$

$y = Ay_1 + By_2$ הפרקון הכללי:

א' $y(x)$ לא חסו'ה בסבי'ת $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$A \neq 0$ ולן $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y_0(x) = 0$

~~$y_2 \sim x^{1/2}$: בסבי'ת $x_0 = \frac{\pi}{2}$~~

~~$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} y_2(x) \ln(x - \frac{\pi}{2}) = 0$~~

~~$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{y_0(x)}{x^{1/2}}$: בסבי'ת $x_0 = \frac{\pi}{2}$~~

$x^{1/2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

(N) $y_2 \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 0$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} y_0(x) \ln(x - \frac{\pi}{2}) = 0$

א'ן

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} y_1(x) \cdot \ln(x - \frac{\pi}{2}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (A_{y_1} + B_{y_2}) \ln(x - \frac{\pi}{2}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} A y_1 \ln(x - \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} -\infty, & A > 0 \\ \infty, & A < 0 \end{cases}$$

(ב) $\psi(x)$ חסומה בסביבת $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
 מהתנאי מקבילים $A=0$ (כי ψ לא חסומה)
 $\left(\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \end{matrix} \right) \cdot \frac{1}{2} > 0$

$$\Rightarrow y = 8\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} y(x) \ln(x - \frac{\pi}{2}) = B \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} y_2(x) \ln(x - \frac{\pi}{2}) = B \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (x - \frac{\pi}{2})^{1/2} \ln(x - \frac{\pi}{2})$$

$A=0$ לפי $x=\frac{\pi}{2}$ שבו $y(x)$ ע

$$\Rightarrow y(x) = B_{1/2}(x) = B(x - \frac{\pi}{2})^{1/2} (1 + d_1(x - \frac{\pi}{2}) + \dots)$$

~~$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} x^{-1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$~~

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (x - \frac{\pi}{2})^{-1/2} f(x) = 1$$

5/27

$$I = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \beta \cdot \left(1 + d_1 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right) = \beta$$

$$\Rightarrow y(x) = y_2(x).$$

$$\Rightarrow y'(x) = \underline{(x - \frac{\pi}{2})^{-1/2}} (1 + d_1(x - \frac{\pi}{2}) + \dots) + (x - \frac{\pi}{2})^{1/2} (d_0 + 2c_2(x - \frac{\pi}{2}) + \dots)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f'(x) \cdot (x - \frac{\pi}{2})^{-1/2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \underbrace{\left(\frac{1}{2(x - \frac{\pi}{2})} \cdot (1 + d_1(x - \frac{\pi}{2})) \right)^{1/2}}_{\infty} \cdot \underbrace{(d_1 + 2c_2(x - \frac{\pi}{2}) + \dots)}_{d_1}$$

$$= \infty$$

$x^2 y'' - 2x \frac{\sin(\frac{x}{2})}{x} y + y = 0$ (סדור באופן זה) (2)
 $a(x) = \frac{\sin(\frac{x}{2})}{x}$ (אם $x=0$ אין סימליות)

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$b(x) = 1$$

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \sin(\frac{x}{2})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = -1$$

$$b_0 = 1$$

$$\lambda^2 + (-1-1)\lambda + 1 = 0$$

סדר השטוח ההכא/סימליות :

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

מחזור

$$\Rightarrow y_1 = x(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

$$y_2 = x(c_1 x + c_2 x^2 + \dots) + \ln x \cdot y_1$$

$$y(x) = A y_1 + B y_2$$

פתרון כללי

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1/2} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1/2} y_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{1/2} c_1 x + c_2 x^2 + \dots) + x^{1/2} \ln(x) (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = 0$$

באופן זה

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1/2} y(x) = A \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1/2} y_1(x) + B \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1/2} y_2(x) = 0$$

10) $y'' + y = 0$ (3)

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \cdot \dot{y} = t^2 \cdot \dot{y}$ (ג'ב) $t = \frac{1}{x}$

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{2}{x^3} \dot{y} +$

10) $y'' + y = 0$ (3) ג'ב $t = \frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dt} = -t^2 \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow y' = -t^2 \dot{y}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{x^2} \frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right) \frac{d}{dt} + \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \right) \left(\frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{2}{x^3} \frac{d}{dt} + \left(\frac{1}{x^2} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) \left(\frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{2}{x^3} \frac{d}{dt} + \frac{1}{x^4} \frac{d^2}{dt^2} = 2t^3 \frac{d}{dt} + t^4 \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\Rightarrow y'' = 2t^3 \dot{y} + t^4 \ddot{y}$$

~~$t^2 \ddot{y} + t^4 \dot{y} - 4y = 0$~~ ג'גב במהירות ונקמה:

~~אם כן, שברנו למטה סדרה של נק' סימטריות~~

~~ושאריות ולכן במהירות המקורית של הנק' השאריות~~

ה) ~~$x^2 y'' + x y' - 4y = 0$~~

ג'גב במהירות ונקמה:

$$t^4 \ddot{y} + 2t^3 \dot{y} + y = 0$$

(חלק ב- t^2):

$$t^2 \ddot{y} + 2t \dot{y} + \frac{1}{t^2} y = 0$$

הפונ' $\frac{1}{t^2}$ אינה אנליטית במסביבת 0 ולכן תנן' אינה סוג' ושאריות. כלומר, במהירות המקורית של אינה סוג' ושאריות.

ה) $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$

(ג'ב) $t = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -t^2 \dot{y}$ $y'' = t^4 \ddot{y} + 2t^3 \dot{y}$

$\Rightarrow t^4 \ddot{y} + t^2 \dot{y} - 4y = 0$ (והנה במהירות)

אם $t = 0$ נק' סוג' ושאריות ולכן במהירות המקורית של היא נק' סוג' ושאריות.

3)

a)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

כדי להפוך ל- $t = \frac{1}{x}$ נציב $t = \frac{1}{x}$

$$(1-\frac{1}{t^2})(t^4\ddot{y} + 2t^3\dot{y}) + \frac{2}{t} \cdot t^2\dot{y} + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

$$\Rightarrow (t^2-1)(t^2\ddot{y} + 2t\dot{y}) + 2t\dot{y} + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad / \cdot \frac{1}{t^2-1}$$

$$\underbrace{t^2\ddot{y}}_{a_2(t)} + \underbrace{\left(2t + \frac{2t}{t^2-1}\right)\dot{y}}_{a_1(t)} + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2-1}y}_{a_0(t)} = 0$$

$a_2(t), a_1(t), a_0(t)$ - פונקציות רגולריות בסביבת 0 ולכן ∞ על סף'ם רגולרית.

$$b) y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

$$t = \frac{1}{x} \Rightarrow t^4\ddot{y} + 2t^3\dot{y} + \frac{2}{t} \cdot t^2\dot{y} + \lambda y = 0 \quad / \cdot \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{t^2\ddot{y}}_{a_2(t)} + \underbrace{2t\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\dot{y}}_{a_1(t)} + \underbrace{\frac{\lambda}{t^2}y}_{a_0(t)} = 0$$

$a_2(t), a_1(t), a_0(t)$ - פונקציות רגולריות בסביבת 0 ולכן ∞ על סף'ם רגולרית.

$$c) y'' - xy = 0$$

$$t^4\ddot{y} + 2t^3\dot{y} - \frac{1}{t}y = 0 \quad / \cdot \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$$

$$\underbrace{t^2\ddot{y}}_{a_2(t)} + \underbrace{2t\dot{y}}_{a_1(t)} - \underbrace{\frac{1}{t^3}y}_{a_0(t)} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$a_2(t), a_1(t), a_0(t)$ - פונקציות רגולריות בסביבת 0 ולכן ∞ על סף'ם רגולרית.