סמ' ב
2009/5

מד"ר 2 - פתרון 9

שאלה 1

למצוא פונקצית גרין ולפתור:

א) $\begin{cases} u''+u = |\cos 2x| \\ u(0)=0,\ u(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} u''-u = 1 \\ u(0)=0,\ u'(1)=0 \end{cases}$

פתרון

א. נבדוק שבעיה רגולרית: $u''+u=0 \Rightarrow u=c_1\cos x+c_2\sin x$

$x=0:\ c_1\cos 0=0 \Rightarrow c_1=0 \qquad x=\frac{\pi}{2}:\ c_2\sin\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow c_2=0$

לכן הבעיה רגולרית!

נבנה פ' גרין $g(x,s)=\begin{cases} c_1(s)\sin x & x\le s \\ c_2(s)\cos x & x>s \end{cases}$

פ' זו מקיימת את תנאי השפה $c_1(s)\sin 0=0$! $c_2(s)\cos\frac{\pi}{2}=0$

נדרוש: $c_1\sin s=c_2\cos s$ (רציפות)

$-c_2\sin s-c_1\cos s=1$ (אי רציפות בנגזרת)

הפתרון: $c_1=-\cos s \quad c_2=-\sin s$

$$\boxed{g(x,s)=\begin{cases} -\cos s\sin x & x\le s \\ -\sin s\cos x & x>s \end{cases}}$$

נפתור את המשוואה:

$$u=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x,s)f(s)\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x,s)|\cos 2s|\,ds=$$

מקרה א': $x\le\frac{\pi}{4}$

$$u=\int_0^x -\sin s\cos x\cos 2s\,ds-\int_x^{\frac{\pi}{4}}\cos s\sin x\cos 2s\,ds+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos s\sin x\cos 2s\,ds$$

$$=\cos x\int_0^x \cos 2s\,d\cos s-\sin x\int_x^{\frac{\pi}{4}}\cos 2s\,d\sin s+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2s\,d\sin s\cdot\sin x$$

בעזרת הנוסחאות: $\cos 2s=1-2\sin^2 s=2\cos^2 s-1$

ניתן בקלות לחשב את האינט'

ובאותו אופן עבור $x>\frac{\pi}{4}$.

ב. נבדוק שהבעיה רגולרית: $u''-u=0 \Leftarrow u=c_1e^x+c_2e^{-x}$

הבעיה רגולרית $\Leftarrow c_1=c_2=0 \Rightarrow ec_1-e^{-1}c_2=0 \quad x=1 \qquad x=0: c_1+c_2=0$

בשביל לבנות את פ' גרין צריך למצוא קומבינציה של הפתרונות היסודיים שמקיימות את תנאי השפה.

$e^x-e^{-x}: \quad e^0-e^{-0}=0.$

$e^{x-1}+e^{1-x}: \ e^{1-1}-e^{1-1}=1-1=0$

ולכן:

$$g(x,s)=\begin{cases} c_1(s)\,(e^x-e^{-x}) & x\le s \\ c_2(s)=(e^{x-1}+e^{1-x}) & x>s \end{cases}$$

(מרציפות) $\quad c_1\,(e^s-e^{-s})=c_2\,(e^{s-1}+e^{1-s})$

(מאי-רציפות של הנגזרת) $\quad c_2(e^{s-1}-e^{1-s})-c_1(s)(e^s+e^{-s})=1$

ומכאן ניתן בקלות לקבל את c_1 ו-c_2 ואז מהקשר $u=\int_0^1 g(x,s)f(s)\,ds$ לקבל את u.

see also
http://www.tau.ac.il/~levant/ode2/solution6_chk.pdf