2) א)
$$\begin{cases} u'' - 2u + \lambda u = 0 \\ u(0)=0 \quad u(1)=0 \end{cases}$$

<u>$\lambda > 2$:</u> $u = A\cos(\sqrt{\lambda-2}\,x) + B\sin(\sqrt{\lambda-2}\,x)$

$A = u(0) = 0 \Rightarrow u = B\sin(\sqrt{\lambda-2}\,x)$

$\Rightarrow B\sin(\sqrt{\lambda-2}) = u(1) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda-2} = n\pi,\ n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \lambda = n^2\pi^2 + 2,\ n\in\mathbb{N}$

<u>$\lambda = 2$:</u> $u = Ax + B$ ולא ניתן לקיים תנאי שפה

לכן אין פתרון. (פתרון טריויאלי בלבד).

<u>$\lambda < 2$:</u> $u = A\cosh(\sqrt{2-\lambda}\,x) + B\sinh(\sqrt{2-\lambda}\,x)$

$A = u(0) = 0 \Rightarrow u = B\sinh(\sqrt{2-\lambda}\,x)$

$\Rightarrow B\sinh(\sqrt{2-\lambda}) = u(1) = 0 \Rightarrow B = 0$

לכן פתרון טריויאלי בלבד ואין פונ' עצמיות.

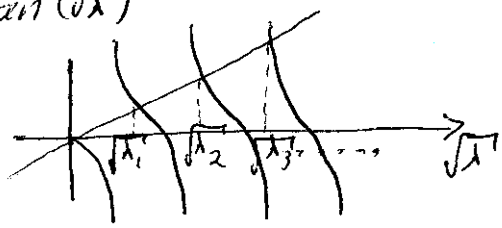
ב)
$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0)=0, \quad u'(1) + u(1) = 0 \end{cases}$$

<u>$\lambda > 0$:</u> $u = A\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

$A = u(0) = 0 \Rightarrow u = B\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\,B\cos(\sqrt{\lambda}) + B\sin(\sqrt{\lambda}) = u'(1) + u(1) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = -\tan(\sqrt{\lambda})$




בציור

<u>$\lambda = 0$:</u> $u = Ax + B$

ולא ניתן לקיים תנאי שפה. (פתרון טריויאלי בלבד)

<u>$\lambda < 0$:</u> $u = A\cosh(\sqrt{-\lambda}\,x) + B\sinh(\sqrt{-\lambda}\,x)$

$A = u(0) = 0 \Rightarrow u = B\sinh(\sqrt{-\lambda}\,x)$

$\Rightarrow \sqrt{-\lambda}\,B\cosh(\sqrt{-\lambda}) + B\sinh(\sqrt{-\lambda}) = u'(1) + u(1) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = -\tanh(\sqrt{-\lambda})$

ומתקבל פתרון <u>יחיד</u>! (אפשר לקרב או לפתור נומרית)

ג) $f(x) = x-1$ לא מקיימת ת"ש בקטע $[0,\pi]$ ולכן לא הצגת ש-ל.

ד) $u(x) = x-2$ לא מקיימת ת"ש בקטע $[0,\pi]$ " " " " ".

$$\langle Lu,v\rangle-\langle u,Lv\rangle=[\text{כמו במשפט}]=p(l)[u'(l)\bar v(l)-\bar v'(l)u(l)]-$$ ③

$$-p(0)[u'(0)\bar v(0)-\bar v'(0)u(0)]=0$$ תנאי' שפה ו- $p(l)=p(0)$

ג) $\begin{cases}((x^2-1)u')'+\cancel{xu}=0\\ u'(0)-u(0)=0\\ 2u'(1)=0\end{cases}$ $\left(\begin{matrix}Lu=((x^2-1)u')'+xu\\ p(x)=x^2-1\end{matrix}\right)^*$ ④

$$\langle Lu,v\rangle-\langle u,Lv\rangle=[\text{כמו במשפט}]=p(1)[u'(1)\bar v(1)-\bar v'(1)u(1)]-$$

$$-p(0)[u'(0)\bar v(0)-\bar v'(0)u(0)]=u'(0)\bar v(0)-\bar v'(0)u(0)=0$$

$p(1)=0$, $p(0)=1$ — תנאי' שפה שמאל'

$\Leftarrow$ הבעיה צמודה לעצמה.

ה) $\begin{cases}Lu=(\cos(x)u')'+\sin xu=0\\ u'(0)=0,\ u'(1)-u(1)=0\end{cases}$

$$\langle Lu,v\rangle-\langle u,Lv\rangle=\cos(1)[u'(1)\bar v(1)-\bar v'(1)u(1)]-$$

$$-[u'(0)\bar v(0)-\bar v'(0)u(0)]\underset{\text{עפ"י תנאי' ימני}}{=}\cos(1)\underbrace{[u(1)\bar v(1)-\bar v(1)u(1)]}_{=0}-[u'(0)\bar v(0)-\bar v'(0)u(0)]$$

$=0$ (עפ"י תנאי' שמאלי) $\Rightarrow$ הבעיה צמודה לעצמה

ד) $\begin{cases}u''+u'=0\\ u(0)=0,\ u(1)=0\end{cases}$ $\Longrightarrow$ לא צמודה. לא צמה,

$$\langle Lu,v\rangle-\langle u,Lv\rangle=\int_0^1(u''+u')\bar v-(\bar v''+\bar v')u\,dx=$$

$$\underset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=}\underbrace{[u'\bar v+\cancel{u\bar v}-\bar v'u-\cancel{\bar v u}]_0^1}_{=0\ (\text{עפ"י תנאי' שפה})}-\int_0^1(\cancel{u'\bar v'}+u\bar v'-\cancel{\bar v'u'}-\bar v u')dx=$$

$$=-\int_0^1(u\bar v'-\bar v u')dx=-\int_0^1u^2\left(\frac{\bar v}{u}\right)'dx\overset{*}{\neq}0$$

* חשבון משרד על $L=L^*\iff a(x)\equiv0$.

בהוכחת המשפט מקבלים את האינטגרל האחרון עם פקטור $a(x)$ באינטגרנד ובמקרה שלנו $a(x)=1$, כלומר $L\neq L^*$ ולכן הבעיה אינה צמודה לעצמה.

הכול נכון, אבל ההוכחה מיותרת: מספיק להשתמש במשפט מההרצאה

הגדרה: $(p(x)u')'+q(x)u=0$ — תנאי שפה סימטריים