מד״ר 2 פיתרון 8

שאלה

למצוא פונקצית גרין ולפתור:

א) $\begin{cases} u''+u = |\cos 2x| \\ u(0)=0,\ u(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} u''-u = 1 \\ u(0)=0,\ u'(1)=0 \end{cases}$

פיתרון

א. נבדוק שהבעיה רגולרית: $u''+u=0 \Leftarrow u=c_1\cos x+c_2\sin x$

$x=0:\ c_1\cos 0=0 \Rightarrow c_1=0 \qquad x=\frac{\pi}{2}:\ c_2\sin\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow c_2=0$

לכן הבעיה רגולרית!

נבנה פ' גרין
$$g(x,s)=\begin{cases} c_1(s)\sin x & x\le s \\ c_2(s)\cos x & x>s \end{cases}$$

פ' זו מקיימת את תנאי השפה $c_1(s)\sin 0=0$! $c_2(s)\cos\frac{\pi}{2}=0$

נדרוש: $c_1\sin s=c_2\cos s$ (רציפות)

$-c_2\sin s-c_1\cos s=\frac{1}{1}$ (אי רציפות בנגזרת)

הפיתרון: $c_1=-\cos s \quad c_2=-\sin s$

$$\boxed{g(x,s)=\begin{cases} -\cos s\sin x & x\le s \\ -\sin s\cos x & x>s \end{cases}}$$ לכן

נפתור את המשוואה:
$$u=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x,s)f(s)\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x,s)|\cos 2s|\,ds=$$

מקרה א: $x\le\frac{\pi}{4}$

$$u=\int_0^x -\sin s\cos x\cos 2s\,ds-\int_x^{\frac{\pi}{4}}\cos s\sin x\cos 2s\,ds+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos s\sin x\cos 2s\,ds$$
$$=\cos x\int_0^x\cos 2s\,d\cos s-\sin x\int_x^{\frac{\pi}{4}}\cos 2s\,d\sin s+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2s\,d\sin s\cdot\sin x$$

בעזרת הנוסחאות: $\cos 2s=1-2\sin^2 s=2\cos^2 s-1$

ניתן בקלות לחשב את האינט'

ובאותו אופן עבור $x>\frac{\pi}{4}$.

ב. נבדוק שבעיה רגולרית: $u''-u=0$ ⇐ $u=c_1e^x+c_2e^{-x}$

$x=0: c_1+c_2=0$ $\quad x=1 \quad ec_1-e^{-1}c_2=0 \Rightarrow c_1=c_2=0$ הבעיה רגולרית

בשביל לבנות את פ' גרין צריך למצוא קומבינציה של
הפתרונות היסודיים שקיימו את תנאי השפה.

$e^x-e^{-x}: \quad e^0-e^{-0}=0.$

$e^{x-1}+e^{1-x}: \quad e^{1-1}-e^{1-1}=1-1=0$

ולכן:

$$g(x,s)=\begin{cases} c_1(s)\,(e^x-e^{-x}) & x\le s \\ c_2(s)\cdot(e^{x-1}+e^{1-x}) & x>s \end{cases}$$

(מרציפות) $\quad c_1(e^s-e^{-s})=c_2(e^{s-1}+e^{1-s})$

(מאי-רציפות של הנגזרת) $\quad c_2(e^{s-1}-e^{1-s})-c_1(s)(e^s+e^{-s})=1$

ומכאן ניתן בקלות לקבל את c_1 ו c_2 ואז מכפל $u=\int_0^1 g(x,s)f(s)ds$

לקבל את u.

יש בהמשך פתרון אחר

ד) א) $\begin{cases} u''+u=\|\cos 2x\| \\ u(0)=0,\ u(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

פתרון המד"ר ההומוגנית ($u''+u=0$) הוא

$$u=c_1\underbrace{\cos x}_{\varphi_2(x)}+c_2\underbrace{\sin x}_{\varphi_1(x)}$$

$\varphi_1(x)$ מקיימת תנאי שמאלי ($\varphi_1(0)=0$) ו- $\varphi_2(x)$ מקיימת תנאי ימני, לכן לפי טענה שהוכחנו בכיתה $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ הם פתרונות יסודיים. נבנה באופן כללי

$$g(x,s)=\begin{cases} A\sin x, & x\le s \\ B\cos x, & x\ge s \end{cases}$$

נדרוש רציפות: $A\sin(s)=B\cos(s)$

בבעיה זו $p(x)=1$ לכן תנאי של הנגזרות מקבל את הצורה

$$1\cdot(-B\sin(s)-A\cos(s))=1 \quad /\cdot\sin(s)$$

$$-B\sin^2(s)-A\sin(s)\cos(s)=\sin(s)$$

מתנאי הרציפות

$$\Rightarrow -B\sin^2(s)-B\cos^2(s)=\sin(s)$$

$$\Rightarrow B=-\sin(s)$$

$$A=-\cos(s)$$

אם כן פונ' גרין היא:

$$g(x,s)=\begin{cases} -\sin(x)\cos(s), & x\le s \\ -\cos(x)\sin(s), & x\ge s \end{cases}$$

נפתור את המד"ר:

$$u(x)=\int_0^{\pi/2}|\cos(2s)|\,g(x,s)\,ds \overset{(*)}{=} -\cos x\int_0^x|\cos(2s)|\sin(s)\,ds-$$

(*) יש להפריד בין $x\le s$ לבין $x\ge s$

$$-\sin(x)\int_x^{\pi/2}|\cos(2s)|\cos(s)\,ds=\cos x\int_0^x(2\cos^2(s)-1)\,d(\cos(s))-$$

יש גם שני מקרים:

1. $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$
2. $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

$$-\sin(x)\int_x^{\pi/4}(1-2\sin^2(s))\,d(\sin(s))+\sin(x)\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1-2\sin^2(s))\,d(\sin(s))=$$

$$=\ldots=\frac{2}{3}\cos^4(x)-\cos^2(x)+\frac{1}{3}\cos(x)-\sin(x)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sin^2(x)-\frac{2}{3}\sin^4(x)+\frac{1}{3}\sin(x).$$

זה הפתרון עבור $x\le\frac{\pi}{4}$. יש לפתור בנפרד עבור $x\ge\frac{\pi}{4}$ (בגלל סימן)

1

ב) $\begin{cases} u''-u=1 \\ u(0)=0, \ u'(1)=0 \end{cases}$

הפתרון הכללי של המד"ר ההומ': $u=Ae^{x}+Be^{-x}$

נמצא $\varphi_1(x)$ המקיימת תנאי שמאלי:

$\varphi_1(0)=0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-B \Rightarrow \varphi_1(x)=A(e^{x}-e^{-x})$

או $\varphi_1(x)=A2\sinh(x)$.

נמצא $\varphi_2(x)$ המקיימת תנאי ימני:

$\varphi_2'(1)=0 \Rightarrow Ae-\frac{B}{e}=0 \Rightarrow B=Ae^{2}$

$\varphi_2(x)=B(e^{x}+e^{2-x})$.

כלומר,

$\Rightarrow g(x,s)=\begin{cases} A\cancel{\sinh(x)}(e^{x}-e^{-x}), & x\le s \\ B(e^{x}+e^{2-x}), & x\ge s \end{cases}$

$\boxed{\sinh x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})}$

תנאי רציפות:

$\begin{cases} B(e^{s}+e^{2-s})=A(e^{s}-e^{-s}) \\ B(e^{s}-e^{2-s})-A(e^{s}+e^{-s})=1 \end{cases}$

כאן $p=1$ לכן התנאי על הנגזרת: $=1$

מהתנאים אלו נקבל:

$2e^{s}(B-A)=1$

$\Rightarrow B=\frac{1}{2}e^{-s}+A$

סוף קצת "התעמלות" אלגברית ולבסוף נקבל:

$A=-\frac{e^{s}+e^{2-s}}{2(e^{2}+1)}, \quad B=-\frac{2\sinh(s)}{e^{2}+1}$

$\Rightarrow g(x,s)=\begin{cases} -\frac{e^{s}+e^{2-s}}{e^{2}+1}\cancel{\sinh(x)}(e^{x}-e^{-x}), & x\le s \\ -\frac{\cancel{\sinh(s)}(e^{s}-e^{-s})}{e^{2}+1}(e^{x}+e^{2-x}), & x\ge s \end{cases}$

נמצא את הפתרון המד"ר (הלא הומוגנית):

$u=\int_0^1 \underbrace{f(s)}_{=1} g(x,s)\,ds = -\frac{e^{x}+e^{2-x}}{e^{2}+1}\int_0^x 2\sinh(s)\,ds-\frac{2\sinh(x)}{e^{2}+1}\int_x^1 (e^{s}+e^{2-s})\,ds=$

$=-\frac{e^{x}+e^{2-x}}{e^{2}+1}\cancel{2}(\cosh(x)-1)-\frac{2\sinh(x)}{e^{2}+1}(e-e-e^{x}+e^{2-x})=$

$=\left[\frac{1}{e^{2}+1}\left(e^{x}+e^{2-x}-(e^{x}+e^{2-x})\frac{(e^{x}+e^{-x})}{2}+(e^{x}-e^{2-x})\frac{(e^{x}-e^{-x})}{2}\right)\right]\cdot 2=$

$=\frac{2}{e^{2}+1}(e^{x}+e^{2-x}-1-e^{2})=\left[\frac{e^{x}+e^{2-x}}{e^{2}+1}-1\right]\cdot 2$