

מזרז כיתרון 8

שאלה

ערכבו עם בעיות שבה בצורה סטנדרטית, ולבדוק האם הן רגולריות

א) $\begin{cases} u'' + 4u = \cos x \\ u(0) = 0, u'(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} u'' + 4u = f(x) \\ u(0) = 0, u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} u'' - u = 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$

ד) $\begin{cases} (\cos x u')' + u = f(x) \\ u(0) + u'(0) = 0, u(\pi) + u'(\pi) = 0 \end{cases}$

ה) $\begin{cases} u'' + u = \sin x \\ u'(0) = 0, u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

ו) $\begin{cases} u'' - u = e^x \\ u'(0) + u(0) = 0, u'(1) + u(1) = 0 \end{cases}$

ז) $\begin{cases} u'' + u = f(x) \\ u'(0) + u(1) = 0, u'(1) = 0 \end{cases}$

פיתרון

א. המשואה בצורה סטנדרטית. בעייה ההומוגנית היא $u'' + 4u = 0$

$u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$u(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$

$u'(\frac{\pi}{4}) = 2B \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow B = 0$

ולכן הבעיה לא רגולרית

ג. המשואה בצורה סטנדרטית. כאן קבוצת $u = A \cos 2x + B \sin 2x$

$u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow B = 0$

ולכן הבעיה רגולרית

ד. המשואה בצורה סטנדרטית. הפתרון של המשואה ההומוגנית הוא $u = A e^x + B e^{-x}$

$u(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e & \frac{1}{e} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow A = B = 0$

$u(1) = 0 \Rightarrow eA + \frac{1}{e}B = 0$

ולכן הבעיה רגולרית

3. הפ' $\cos x$ אינה חיובית בתחום $[\pi, 2\pi]$ ולכן הבעיה לא בצורה סטנדרטית

ה. הגזיה בצורה סטנדרטית. הפיתרון קבועה ההומוגנית הוא: $u = A \sin x + B \cos x$

$$u'(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$u'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow B = 0$$

אכן קבועה הומוגנית

א. הגזיה בצורה סטנדרטית. הפיתרון קבועה ההומוגנית $u = Ae^x + Be^{-x}$

$$u'(0) + u(0) = 0 \Rightarrow A - B + A + B = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$u'(3) + u(3) = 0 \Rightarrow Ae^3 - Be^{-3} + Ae^3 + Be^3 = 0 \Rightarrow 2Ae^3 = 0$$

אכן קבועה עם הומוגנית

ד. קבועה עם סטנדרטית כי תנאי השפה הם "הומוגניים" (מערבוב נק' שנייה) גיליתיה משוואה

שאלה 2

עזריהם בצורה סטנדרטית $u'' + \frac{2}{x+1}u' + u = x$
 א) $\begin{cases} u'' + \frac{2}{x+1}u' + u = x \\ u(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases}$
 ב) $\begin{cases} u'' + \frac{2}{x+1}u' + u = x \\ u(1) = 0, u'(0) = 1 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} u''(x^2+1) + 2xu' + xu = \sin x \\ u'(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$

פותרון

א. נחפש צורה גזוק כק שאת נכפול בו את המשוואה הנו הצורה $\frac{2p}{x+1} = p'$ קבוע משוואה עם q :
 נפתור את המגזי ונקבל $p = (x+1)^2$ $(\frac{p'}{p} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow \ln p = \ln(x+1)^2)$

ישקן המשוואה שקולת היא $(x+1)^2 u'' + 2(x+1)u' + u(x+1)^2 = x(x+1)^2$
 ד"א המשוואה בצורה הסטנדרטית היא: $\left(\frac{u}{(x+1)^2} \right)' + u(x+1)^2 = x(x+1)^2$
 $\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$

ה. הגזיה כלן היא בתנאי השפה. נסתן $u = u_1 + v$ $(u_1 = u - v)$

ונמצא v שעבורו תנאי השפה יהיו הומוגניים: $\begin{cases} v'(0) - v(0) = 1 \\ v'(1) = 2 \end{cases}$

עמם $v = 2x + 1$ הוא כזה!

ולכן המשוואה שקיבלנו היא:

$$[(x^2+1)(u_1+v)'] + \cos x(u_1+v) = f(x)$$

$$[(x^2+1)u_1'] + [(x^2+1) \cdot 2] + (2x+1)\cos x + \cos x \cdot u_1 = f(x)$$

ולכן המשוואה בצורה מסוימת היא:

$$\begin{cases} [(x^2+1)u_1'] + u_1 \cos x = f(x) - 4x - (2x+1)\cos x \\ u_1'(0) - u_1(0) = 0 \quad u_1'(1) = 0 \end{cases}$$

הנאיב של $x^2 = (1+x^2)$ ולכן המשוואה שקיבלנו היא:

$$\begin{cases} [(x^2+1)u_1'] + x u_1 = \sin x \\ u_1'(0) = 0 \quad u_1(1) = 0 \end{cases}$$

ולכן המשוואה בצורה מסוימת היא!