מד"ר פיתרון 7

<u>שאלה 1</u>

חשבו: א. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{3}} Y_0(x)$, $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{3}} J_0(x)$

ב. $\lim\limits_{x\to+0} x^{-3} J_{2.5}(x)$, $\lim\limits_{x\to+0} x^{3} Y_{2.5}(x)$

ג. $\lim\limits_{x\to\infty} J_k(x) x^{\frac{1}{2}}$, $\lim\limits_{x\to\infty} Y_k(x) x^{\frac{1}{3}}$ $\quad \forall k\in\mathbb{N}$.

<u>פיתרון</u>

<u>א</u>

$$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{3}} J_0(x) = \lim x^{\frac{1}{3}}(1+a_1x+\cdots) = 0$$

$$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{3}} Y_0(x) = \lim x^{\frac{1}{3}}(\ln x\, J_0 + (\cdots)) = 0$$

<u>ב</u>

$$\lim_{x\to+0} x^{-3} J_{2.5} = \lim x^{-3} x^{2.5}(c_0+\cdots) = \infty$$

$$Y_{2.5} = \alpha J_{2.5}\ln x + x^{-2.5}(\beta+\dots),\quad \beta\neq 0$$

$$\Rightarrow Y_{2.5} = \alpha \underbrace{x^{2.5}(1+\dots)\ln x}_{o(x^2)} + x^{-2.5}(\beta+\dots)$$

לכן

$$\lim_{x\to+0} x^3 Y_{2.5} = \lim_{x\to+0} x^{0.5}(\beta+\dots) = 0$$

<u>ג</u>

$$\lim_{x\to\infty} J_k(x)x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}+\frac{n^2-\frac{1}{4}}{2x}\right)+O(1)\cdot\frac{1}{x^{5/2}}\right]x^{\frac{1}{2}}$$ לא קיים!

$$\lim_{x\to\infty} Y_k(x)x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n}+\frac{n^2-\frac{1}{4}}{2x}\right)+O(1)\frac{1}{x^{5/2}}\right]x^{\frac{1}{3}} = 0$$

שאלה 2

להצביע על בעיות שהן בצורה סטנדרטית, ולבדוק האם הן רגולריות

א) $\begin{cases} u''+4u=\cos x \\ u(0)=0 \quad u'(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} u''+4u=f(x) \\ u(0)=0 \quad u'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} u''-u=1 \\ u(0)=0 \quad u(1)=0 \end{cases}$

ד) $\begin{cases} (\cos x\, u')'+u=f(x) \\ u(0)+u'(0)=0 \quad u(\pi)+u'(\pi)=0 \end{cases}$

ה) $\begin{cases} u''+u=\sin x \\ u'(0)=0 \quad u'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

ו) $\begin{cases} u''-u=e^{x} \\ u'(0)+u(0)=0 \quad u'(3)+u(3)=0 \end{cases}$

ז) $\begin{cases} u''+u=f(x) \\ u'(0)+u(1)=0 \quad u'(1)=0 \end{cases}$

פתרון

א. המשוואה בצורה סטנדרטית. הבעיה ההומוגנית היא $u''+4u=0$

לכן $u(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$.

$u(0)=0 \Rightarrow A=0$

$u'(\frac{\pi}{4})=2B\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow$ כלום

ולכן $\boxed{\text{הבעיה לא רגולרית}}$.

ב. המשוואה בצורה סטנדרטית כמו קודם $u=A\cos 2x+B\sin 2x$

$u(0)=0 \Rightarrow A=0$

$u'(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow B=0$

ולכן $\boxed{\text{הבעיה רגולרית}}$

ג. המשוואה בצורה סטנדרטית. הפתרון של המשוואה ההומוגנית הוא $u=Ae^{x}+Be^{-x}$

$u(0)=0 \Rightarrow A+B=0$

$u(1)=0 \Rightarrow e\cdot A+e^{-1}B=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e & \frac{1}{e} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow A=B=0$

ולכן $\boxed{\text{הבעיה רגולרית}}$

ד. הפ' $\cos x$ אינה חיובית בתחום $[0,\pi]$ ולכן $\boxed{\text{הבעיה לא בצורה סטנדרטית}}$

ה. הבעיה בצורה סטנדרטית. הפתרון לבעיה ההומוגנית הוא: $u=A\sin x+B\cos x$

$u'(0)=0 \Rightarrow A=0$

$u'(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow B=0$

לכן $\boxed{\text{הבעיה רגולרית}}$

ו. הבעיה בצורה סטנדרטית. הפתרון לבעיה ההומוגנית $u=Ae^{x}+Be^{-x}$

$u'(0)+u(0)=0 \Rightarrow A-B+A+B=0 \Rightarrow A=0$

$u'(3)+u(3)=0 \Rightarrow Ae^{3}-Be^{-3}+Ae^{3}+Be^{-3} \Rightarrow 2Ae^{3}=0$

ולכן $\boxed{\text{הבעיה לא רגולרית}}$

ז. $\boxed{\text{הבעיה לא בצורה סטנדרטית}}$ כי תנאי השפה לא "מופרדים" (מערבים נק' שונות באותה משוואה)

שאלה 2

להעביר לצורה סטנדרטית

א) $\begin{cases} u''+\frac{2}{x+1}u'+u=x \\ u(0)=0 \quad u'(1)=0 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} [(x^2+1)u']'+\cos x\, u=f(x) \\ u'(0)-u(0)=1 \quad u'(1)=2 \end{cases}$

ג) $\begin{cases} u''(x^2+1)+2xu'+xu=\sin x \\ u'(0)=0 \quad u(1)=0 \end{cases}$

פתרון

א. נחפש גורם $p(x)$ כך שאם נכפיל בו את המשוואה היא תעבור לצורה סטנדרטית. נקבל משוואה על p: $\frac{2p}{x+1}=p'$

נפתור את המד"ר ונקבל $p=(x+1)^2$ $\left(\frac{p'}{p}=\frac{2}{x+1} \Rightarrow 2\ln(x+1)=\ln p\right)$

ולכן המשוואה שקולה ל: $(x+1)^2u''+2(x+1)u'+u(x+1)^2=x(x+1)^2$

צ"ל המשוואה בצורה הסטנדרטית היא: $\begin{cases} ((x+1)^2u')'+u(x+1)^2=x(x+1)^2 \\ u(0)=0 \quad u'(1)=0 \end{cases}$

ב. הבעיה כאן היא בתנאי השפה. נסמן $u=u_1+V$ $(u_1=u-V)$

ונמצא V שעבורו תנאי השפה (בשביל u_1) יהיו הומוגניים: $\begin{cases} V'(0)-V(0)=1 \\ V'(1)=2 \end{cases}$

למשל $V=2x+1$ הוא כזה!

ולכן המשוואה שקולה ל:

$$[(x^2+1)(u_1+v)']' + \cos x(u_1+v) = f(x)$$

$$[(x^2+1)u_1']' + [(x^2+1)\cdot 2]' + (2x+1)\cos x + \cos x\cdot u_1 = f(x)$$

ולכן המשוואה בצורת ת"ג ס"ל נורמלית היא:

$$\begin{cases} [(x^2+1)u_1']' + u_1\cos x = f(x) - 4v - (2x+1)\cos x \\ u_1'(0) - u_1(0) = 0 \qquad u_1'(1) = 0 \end{cases}$$

ב. נשים לב ש $(x^2+1)' = 2x$ ולכן המשוואה שלנו שקולה ל:

$$\begin{cases} [(x^2+1)u']' + xu = \sin x \\ u'(0) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

זו משוואה בצורה ס"ל נורמלית!