2005
סמ' ב

מד"ר פיתרון 7

שאלה 1

לחשב את הגבולות (במידה והם קיימים): $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}}y(x)$, $\lim_{x\to 0} x^{\frac{2}{3}}y(x)$
כאשר $y(x)\neq 0$ ומקיימת את המשוואה $x^2y''+4\sinh\frac{x}{2}y'+y=0$

פיתרון

ישנה סינגולריות ב $x=0$ אבל $4\frac{\sinh\frac{x}{2}}{x}$ ו 1 הן פ' אנליטיות
ולכן $x=0$ היא נק' סינגולרית רגולרית.

$$a_0=2,\ b_0=1 \quad : \quad \lambda(\lambda-1)+2\lambda+1=0$$

$$\lambda^2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ולכן:

$$y=A|x|^{-1/2}\Big[\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|+\varphi\Big)(1+d_1x+d_2x^2+\dots)+\sin\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|+\varphi\Big)(f_1x+f_2x^2+\dots)\Big]$$

ולכן

$$\boxed{\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{2}}y(x)}=\lim_{x\to 0}A[\dots]\leftarrow \boxed{\text{לא קיים}}$$

$$\boxed{\lim x^{\frac{2}{3}}y(x)}=\lim x^{\frac{1}{6}}[\dots]\boxed{=0}$$

שאלה 2

לסווג נק' סינגולריות (כולל אינסופיות) של: $2(x^2+2x+1)x^2y''+(3x^2+2)xy'-(\frac{3}{8}x+2)(x+1)y=0$
ולחשב את הגבולות: $\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{4}}y(x)$ ו $\lim_{x\to\infty}x^{3/2}y(x)$
במקרים: א. ידוע ש y חסומה בסביבת 0.
ב. y לא חסומה בסביבת 0 וחיובית.
ואת הגבולות: $\lim x^{\frac{1}{3}}y(x)$, $\lim x^{-1}y(x)$.
במקרים: ג. y חסומה בסביבת ∞
ד. y לא חסומה בסביבת ∞.

פיתרון

המשוואה שקולה ל: $2(x+1)^2x^2y''+(3x^2+2)xy'-(\frac{3}{8}x+2)(x+1)y=0$
נק' סינגולריות: $x=0$, $x=-1$ ו $x=\infty$.

$x=0$: $\frac{1}{2}(1+x)(2+\frac{3}{8}x)$ ו $\frac{1}{2}(3x^2+2)$ אנליטיות ולכן $\boxed{x=0 \text{ נק' סינגולרית רגולרית}}$

$x=-1$: $\frac{(3x^2+2)}{2x(x+1)}$ לא אנליטית ב $x=-1$ ולכן $\boxed{x=-1 \text{ נק' סינגולרית שלא רגולרית}}$

$x=\infty$: $x=\frac{1}{t}$: $y'=-t^2\dot{y}$, $y''=t^4\ddot{y}+2t^3\dot{y}$

ולכן המשוואה הופכת ל:

$$\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+1\right)\frac{2}{t^2}\left(t^4\ddot{y}+2t^3\dot{y}\right)+\left(\frac{3}{t^2}+2\right)\frac{1}{t}\left(-t^2\dot{y}\right)-\left(\frac{3}{8t}+2\right)\left(\frac{1}{t}+1\right)y=0$$

א

$$\circledast \quad \ddot{y}\cdot 2\cdot(1+t)^2+\dot{y}\left(2t+\frac{1}{t}+8\right)-\left(\frac{3}{8t^2}+\frac{15}{8t}+2\right)y=0$$

ומכיוון ש $\frac{t^2\left(\frac{3}{8t^2}+\frac{15}{8t}+2\right)}{2(1+t)^2}$ ו $\frac{t\left(2t+\frac{1}{t}+8\right)}{2(1+t)^2}$ אנליטיות $\boxed{x=\infty \text{ נק' סינגולרית רגולרית}}$

נכתוב משוואת אינדקסים למשוואה: $a_0=1$ $b_0=-1$

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1$$

ולכן הפיתרון הכללי הינו מהצורה:

$$y=A\cdot|x|(1+c_1x+\cdots)+B\left[\alpha\ln|x|\left(x(1+c_1x+\cdots)\right)+|x|^{-1}(1+d_1x+\cdots)\right]$$

א. נתון כי y חסומה בסביבת 0 ולכן $B=0$ ולכן $\boxed{\lim x^{\frac{1}{2}}y=0}$ $\boxed{\lim x^{\frac{3}{2}}y=0}$

הערה: אם y כלשהי חסומה בסביבת 0 אז $\lim x^r y(x)=0$ $r>0$

ב. y לא חסומה בסביבת 0 ולכן $B\neq 0$ ואז $\boxed{\lim x^{\frac{1}{2}}y=+\infty}$ $\boxed{\lim x^{\frac{3}{2}}y=0}$

נכתוב משוואת אינדקסים עבור המשוואה($\circledast$) $a_0=\frac{1}{2}$ $b_0=-\frac{3}{16}$

$$\lambda(\lambda-1)+\frac{1}{2}\lambda-\frac{3}{16}=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{3}{4},-\frac{1}{4}$$

ולכן הפיתרון הכללי הוא מהצורה:

$$y = A|t|^{3/4}(1+c_1t+\cdots) + B\left[\alpha \ln|t| \left(|t|^{3/4}(1+c_1t+\cdots)\right) + |t|^{3/4}(1+d_1t+\cdots)\right]$$

ג. y חסומה בסביבת ∞ צ"ל $B=0$ (כי y חסומה בסביבת 0) ואז

$$\boxed{\lim_{t\to 0} t^{-\frac{1}{3}} y_{B=0}(t) = 0}$$

$$\boxed{\lim t\, y_{B=0}(t) = 0}$$

ד. y לא חסומה בסביבת ∞ ומוגבלת בסביבת 0 ⇐ $0 < B \neq 0$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} t^{-1/3} y(t) = \infty}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} t\, y(t) = 0}$$

שאלה 3

חשב: א. $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}} y_0(x)$, $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}} J_0(x)$

ב. $\lim_{x\to 0} x^{-3} J_{2.5}(x)$, $\lim_{x\to 0} x^{3} y_{2.5}(x)$

ג. $\lim_{x\to\infty} J_k(x)\, x^{\frac{1}{2}}$, $\lim_{x\to\infty} y_k(x)\, x^{\frac{1}{3}}$. $\forall k \in \mathbb{N}$

פיתרון

א

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}} J_0(x) = \lim x^{\frac{1}{3}}(1+a_1x+\cdots) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}} y_0(x) = \lim x^{\frac{1}{3}}(\ln x \cdot J_0 + (\cdots)) = 0$$

ב

$$\lim_{x\to 0} x^{-3} J_{2.5} = \lim x^{-3} x^{2.5}(c_0+\cdots) = \infty$$

$$\lim x^3 y_{2.5} = \lim x^3 \left[\frac{J_{2.5}\cos(2.5\pi) - J_{-2.5}}{\sin(2.5\pi)}\right] = 0$$

$J_{-2.5} = (a_0 x^{-2.5} + \cdots)$ ⇐ $\lim x^3 J_{-2.5} = 0$.

ג

לא קיים! ⇐ $\lim_{x\to\infty} J_k(x)\, x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{2x}\right) + O(1)\cdot\frac{1}{x^{5/2}}\right] x^{1/2}$

$$\lim y_k(x)\, x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{n^2-\frac{1}{4}}{2x}\right) + O(1)\frac{1}{x^{5/2}}\right] x^{1/3} = 0$$