מד״ר 2 - פיתרון 6

<u>שאלה 1</u>

לחשב גבולות $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} |x-\frac{\pi}{2}|^{3/2} y(x)$. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \ln(x-\frac{\pi}{2}) y(x)$

כאשר y פיתרון של: $\cos^2 x\, y'' + \frac{1}{2}\sin(3x-\frac{3\pi}{2}) y' - \frac{1}{2} y = 0$

א. ידוע שy לא חסומה בסביבת $x=\frac{\pi}{2}$ חיובית

ב. $y(x)$ חסומה בסביבת $x=\frac{\pi}{2}$

ג. לחשב $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(x-\frac{\pi}{2})^{-\frac{1}{2}} y(x)$ אם ידוע ש $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(x-\frac{\pi}{2})^{-\frac{1}{2}} y(x)=1$

<u>פיתרון</u>

נכתוב שוב את המשוואה:

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 y'' + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left[\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin 3(x-\frac{\pi}{2})}{2\sin^2(x-\frac{\pi}{2})}\right] y' - \frac{1}{2}\,\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\sin^2(x-\frac{\pi}{2})}\, y = 0$$

נסמן $t=x-\frac{\pi}{2}$ ואז המשוואה הופכת ל:

$$t^2 y'' + t\left(\frac{t\sin 3t}{2\sin^2 t}\right) y' - \frac{t^2}{2\sin^2 t}\, y = 0$$

$t=0$ נק' סינגולרית רגולרית:

$$a_0 = \frac{3}{2}\left(=\lim_{t\to 0}\frac{t\sin 3t}{2\sin^2 t}\right)$$

$$b_0 = -\frac{1}{2}\left(=\lim -\frac{t^2}{2\sin^2 t}\right)$$

לכן משוואת האינדקסים היא: $\lambda(\lambda-1)+a_0\lambda+b_0=0$

$\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}=0$.

ולכן $\lambda_{1,2}=-1,\frac{1}{2}$. מכיוון ש $\lambda_1\neq\lambda_2$! $\lambda_1-\lambda_2\notin\mathbb{Z}$

$y_1=|t|^{1/2}(1+c_1 t+\cdots)$

$y_2=|t|^{-1}(1+d_1 t+\cdots)$

$y_0 = Ay_1+By_2$

א. y לא חסומה $\Leftarrow B\neq 0$! y חיובית $\Leftarrow B>0$.

ולכן $\boxed{\lim_{t\to 0^+}\ln t\, y(t)} = \lim_{t\to 0^+}\ln t\cdot|t|^{-1}B(\cdots) + \ln t\,|t|^{1/2}A(\cdots) = \boxed{-\infty}$

$\boxed{\lim_{t\to 0^+}|t|^{3/2}y(t)} = \lim_{t\to 0^+}|t|^{3/2}\left(|t|^{-1}B(\cdots)+A|t|^{1/2}(\cdots)\right) = \boxed{0}$

ג. y חסומה $\Leftarrow$ $B=0$

$\boxed{\lim |t|^{3/2} y(t)} = \lim |t|^{3/2} A|t|^{1/2}(\dots) \boxed{=0}$

$\boxed{\lim \ln t\, y(t)} = \lim \ln t\, A|t|^{1/2}(\dots) \boxed{=0}$

ד. $\lim_{t\to 0} (t)^{-1/2} y(t) = 1 \Rightarrow B=0 \Rightarrow \lim |t|^{-1/2}|t|^{1/2}A(1+\dots) = \lim A(1+\dots) = 1$

ולכן $A=1$. כנ"ל.

$y = |t|^{1/2}(1+\dots)$

$y' = \frac{1}{2}|t|^{-1/2}(1+\dots) + |t|^{1/2}(\dots)$

ולכן

$\boxed{\lim_{t\to 0} |t|^{-1/2} y'(t) \boxed{=+\infty}}$

<u>שאלה 2</u>

לחשב $\lim_{x\to 0^+} x^{2/3} y(x)$ ו- $\lim_{x\to 0^+} x^{1/2} y(x)$ כאשר $y(x)$ פיתרון של

$x^2 y'' + 4\sin\frac{x}{2} y' - 2y = 0$

וידוע ש $y(x) \neq 0$.

<u>פיתרון</u>

נכתוב שוב את המשוואה: $x^2 y'' + x\left(\frac{4\sin\frac{x}{2}}{x}\right) y' - 2y = 0$

$x=0$ נק' סינגולרית רגולרית:

$a_0 = 2 \quad b_0 = -2$

ולכן משוואת האינדקסים היא: $\lambda(\lambda-1) + a_0\lambda + b_0 = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2, 1$

ולכן $y = Ay_1 + By_2$

$y_1 = |x|^1(1 + c_1 x + \dots)$

$y_2 = \mu \ln|x| \cdot y_1 + |x|^{-2}(1 + d_1 x + \dots)$

$\lim x^{2/3} y(x) = \begin{cases} +\infty & B>0 \\ -\infty & B<0 \\ 0 & B=0 \end{cases}$	$\lim x^{1/2} y(x) = \begin{cases} +\infty & B>0 \\ -\infty & B<0 \\ 0 & B=0 \end{cases}$

שאלה 3

לחשב את הגבולות (במידה והם קיימים): $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}} y(x)$, $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} y(x)$

כאשר $y(x)\neq 0$ ומקיימת את המשוואה $x^2y''+4\sin\frac{x}{2}y'+y=0$

פיתרון

ישנה סינגולריות ב $x=0$ אבל $4\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$! 1 הן פ' אנליטיות

ולכן $x=0$ היא נק' סינגולרית רגולרית.

$\lambda(\lambda-1)+2\lambda+1=0$: $a_0=2, b_0=1$

$\lambda^2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ולכן:

$$y=A|x|^{-1/2}\left[\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|+\varphi\right)(1+d_1x+d_2x^2\dots)+\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|+\varphi\right)(f_1x+f_2x^2+\dots)\right]$$

ולכן

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}}y(x)}=\lim_{x\to 0}A[\dots]\boxed{\leftarrow \text{לא קיים}}$$

$$\boxed{\lim x^{\frac{2}{3}}y(x)}=\lim x^{\frac{1}{6}}[\dots]\boxed{=0}$$

שאלה 4

לסווג נק' סינגולריות (כולל אינסופיות) של $2(x^2+2x+1)x^2y''+(3x^2+2)xy'-(\frac{5}{8}x+2)(x+1)y=0$

ולחשב את הגבולות: $\lim_{x\to 0} x^{3/2}y(x)$ | $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}}y(x)$

במקרים: א. ידוע ש y חסומה בסביבת 0.

ב. y לא חסומה בסביבת 0 מנוקבת.

ואת הגבולות: $\lim x^{-1}y(x)$, $\lim x^{\frac{1}{2}}y(x)$.

במקרים: ג. y חסומה בסביבת ∞

ד. y לא חסומה בסביבת ∞.

פיתרון

המשוואה שקולה ל: $2(x+1)^2x^2y''+(3x^2+2)xy'-(\frac{5}{8}x+2)(x+1)y=0$

נק' סינגולריות: $x=0$, $x=-1$; $x=\infty$.

ולכן הפיתרון הכללי הוא מהצורה:

$$y = A|t|^{3/4}(1+c_1t+\cdots) + B\left[\alpha \ln|t|\left(|t|^{3/4}(1+c_1t+\cdots)\right) + |t|^{3/4}(1+d_1t+\cdots)\right]$$

ב. y חסומה בסביבת ∞ צ"ל $B=0$ (כי y לא חסומה בסביבת 0) ולכן

$$\boxed{\lim_{t\to 0} t^{-\frac{1}{3}} y_{B=0}(t) = 0}$$

$$\boxed{\lim t\, y_{B=0}(t) = 0}$$

ג. y לא חסומה בסביבת ∞ וחסומה בסביבת 0 $\Leftarrow$ $0 < B \neq 0$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} t^{-1/3} y(t) = \infty}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} t\, y(t) = 0}$$