מד"ר 2 - פיתרון 6

<u>שאלה 1</u>

לחשב גבולות (x) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}|x-\frac{\pi}{2}|^{3/2}y(x)$. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\ln(x-\frac{\pi}{2})y(x)$

כאשר y פיתרון של $\cos^2x\,y''+\frac12\sin(3x-\frac{3\pi}{2})y'-\frac12y=0$

א. ידוע ש y לא חסומה בסביבת $x=\frac{\pi}{2}$ וחיובית

ב. $y(x)$ חסומה בסביבת $x=\frac{\pi}{2}$

ג. לחשב $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(x-\frac{\pi}{2})^{-\frac12}y(x)$ אם ידוע ש $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(x-\frac{\pi}{2})^{-\frac12}y(x)=1$

<u>פיתרון</u>

נכתוב שוב את המשוואה:

$$(x-\tfrac{\pi}{2})^2y''+(x-\tfrac{\pi}{2})\left[\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin3(x-\frac{\pi}{2})}{2\sin^2(x-\frac{\pi}{2})}\right]y'-\frac12\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\sin^2(x-\frac{\pi}{2})}y=0$$

נסמן $t=x-\frac{\pi}{2}$ ואז המשוואה הופכת ל:

$$t^2y''+t\left(\frac{t\sin3t}{2\sin^2t}\right)y'-\frac{t^2}{2\sin^2t}y=0$$

$t=0$ נק' סינגולרית רגולרית:

$$a_0=\frac32\left(=\lim_{t\to0}\frac{t\sin3t}{2\sin^2t}\right)$$

$$b_0=-\frac12\left(=\lim-\frac{t^2}{2\sin^2t}\right)$$

לכן משוואת האינדקסים היא: $\lambda(\lambda-1)+a_0\lambda+b_0=0$

$\lambda^2+\frac12\lambda-\frac12=0$.

ולכן $\lambda_{1,2}=-1,\frac12$. מכיוון ש $\lambda_1\neq\lambda_2$! $\lambda_1-\lambda_2\notin\mathbb{Z}$

$y_1=|t|^{1/2}(1+c_1t+\cdots)$

$y_2=|t|^{-1}(1+d_1t+\cdots)$

$y=Ay_1+By_2$

א. y לא חסומה $\Leftarrow B\neq0$! y חיובית $\Leftarrow B>0$.

ולכן $\boxed{\lim_{t\to0^+}\ln t\,y(t)}=\lim_{t\to0^+}\ln t\cdot|t|^{-1}B(\cdots)+\ln t\,|t|^{1/2}A(\cdots)=\boxed{-\infty}$

$\boxed{\lim_{t\to0^+}|t|^{3/2}y(t)}=\lim_{t\to0^+}|t|^{3/2}(|t|^{-1}B(\cdots)+A|t|^{1/2}(\cdots))=\boxed{0}$

ג. y חסומה $\Leftarrow$ $B=0$

$$\boxed{\lim |t|^{3/2} y(t)} = \lim |t|^{3/2} A|t|^{1/2}(\dots) \boxed{=0}$$

$$\boxed{\lim \ln t\ y(t)} = \lim \ln t\ A|t|^{1/2}(\dots) \boxed{=0}$$

ד. $\lim_{t\to 0} (t)^{-1/2} y(t) = 1 \Rightarrow B=0 \Rightarrow \lim |t|^{-1/2} |t|^{1/2} A(1+\dots) = \lim A(1+\dots) = 1$

ולכן $A=1$. צ"ל

$$y = |t|^{1/2}(1+\dots)$$
$$y' = \tfrac{1}{2}|t|^{-1/2}(1+\dots) + |t|^{1/2}(\dots)$$

ולכן

$$\boxed{\lim_{t\to 0} |t|^{-1/2} y'(t) \boxed{=+\infty}}$$

<u>שאלה 2</u>

לחשב $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}} y(x)$! $\lim_{x\to 0^+} x^{+\frac{1}{2}} y(x)$ כאשר $y(x)$ פיתרון של
$x^2 y'' + 4\sin\frac{x}{2} y' - 2y = 0$

וידוע ש $y(x) \not\equiv 0$.

<u>פיתרון</u>

נכתוב שוב את המשוואה: $x^2 y'' + x\left(\frac{4\sin\frac{x}{2}}{x}\right) y' - 2y = 0$

$x=0$ נק' סינגולרית רגולרית:

$a_0 = 2 \quad b_0 = -2$

ולכן משוואת האינדקסים הנה: $\lambda(\lambda-1) + a_0\lambda + b_0 = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2, 1$

ולכן $y = Ay_1 + By_2$

$y_1 = |x|^1 (1 + c_1 x + \dots)$

$y_2 = \mu \ln|x| \cdot y_1 + |x|^{-2}(1 + d_1 x \dots)$

$\lim x^{\frac{2}{3}} y(x) = \begin{cases} +\infty & B>0 \\ -\infty & B<0 \\ 0 & B=0 \end{cases}$	$\lim x^{\frac{1}{2}} y(x) = \begin{cases} +\infty & B>0 \\ -\infty & B<0 \\ 0 & B=0 \end{cases}$

שאלה 3

לסווג נק' סינגולריות ב ∞:

א) $y''+y=0$

ב) $x^2y''+xy'-4y=0$

ג) $y''-2xy'+\lambda y=0$

ד) $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y$

ה) $y''-xy=0$

פתרון

קודם כל נשים לב שכאשר עוברים קואורדינטות $x \to \frac{1}{t}$ אז:

$$y' = -\frac{\dot y}{x^2} = t^2\dot y \qquad y'' = \frac{1}{x^4}\ddot y + \frac{2}{x^3}\dot y = t^4\ddot y + 2t^3\dot y$$

א. $y''+y=0 \Rightarrow t^4\ddot y + 2t^3\dot y + y = 0 \Rightarrow t^2\ddot y + 2t\dot y + \frac{y}{t^2} = 0$

$\frac{1}{t^2}$ לא אנליטית, לכן $t=0$ לא סינגולרית רגולרית ולכן $\boxed{x=\infty \text{ נק' סינגולרית לא רגולרית}}$

ב. $x^2y''+xy'-4y=0 \Rightarrow t^2\ddot y + 2t\dot y - t\dot y - 4y = 0 \Rightarrow t^2\ddot y + t\dot y - 4y$

$t, -4$ אנליטיות ולכן $t=0$ נק' סינגולרית רגולרית ולכן $\boxed{x=\infty \text{ נק' סינגולרית רגולרית}}$

ד. $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \Rightarrow t^2(t^2-1)\ddot y + \dot y(2t^3-2t+2t) + \alpha(\alpha+1)y = 0$

$$\Downarrow$$

$$t^2\ddot y + t\cdot\frac{2t^2}{t^2-1}\dot y + \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2-1}y = 0$$

$\frac{2t^2}{t^2-1}$, $\frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2-1}$ אנליטיות ולכן $\boxed{x=\infty \text{ נק' סינגולרית רגולרית}}$

ג. $y''-2xy'+\lambda y=0 \Rightarrow t^2\ddot y + t\,\frac{2t^2+2}{t^2}\dot y + \frac{\lambda}{t^2}y = 0$

$\frac{2t^2+2}{t^2}$ לא אנליטית ב 0 ולכן $t=0$ נק' סינגולרית לא רגולרית ולכן $\boxed{x=\infty \text{ נק' סינגולרית לא רגולרית}}$

ה. $y''-xy=0 \Rightarrow t^2\ddot y + t\cdot 2\dot y - \frac{1}{t^3}y = 0$

$\frac{1}{t^3}$ לא אנליטית ב 0 ולכן $\boxed{x=\infty \text{ נק' סינגולריות לא רגולרית}}$