פתרון תרגיל מד"ר 2

שאלה 1

למצוא נק' סינגולריות רגולריות ואת האופיינים

א) $xy''+2xy'+6e^{x}y=0$

ב) $x^{3}y''+2xy'+xy=0$

ג) $x(x-1)y''+6x^{2}y'+3xy=0$

ד) $xy''-\sin x\,y'+\frac{\cos x}{x^{2}}y=0$

ה) $x^{2}y''+\frac{1}{2}(x+\sin x)y'+y=0$

ו) $xy''+\frac{1}{x^{2}}\operatorname{tg}x\,y=0$

ז) $(x-2)^{2}(x+2)y''+2xy'+3(x-2)y=0$

פתרון 1

א. $y''+2y'+6\frac{e^{x}}{x}y=0 \Leftarrow$ 0 נק' סינגולרית: $\begin{cases} x\cdot 2=2x \\ x^{2}\cdot 6\frac{e^{x}}{x} \end{cases}$ אנליטיות $\Leftarrow$ $\boxed{x=0 \text{ נק' סינגולרית רגולרית}}$

נבדוק משוואת אינדקסים $\lambda(\lambda-1)=0 \Leftarrow$ $\boxed{\lambda=0,1}$

ב. $y''+2\frac{1}{x^{2}}y'+\frac{1}{x^{2}}y=0 \Leftarrow$ 0 נק' סינגולרית: $x\cdot\frac{2}{x^{2}}=\frac{2}{x}$ לא אנליטית $\Leftarrow$ $\boxed{\text{x/0 נק' סינגולרית רגולרית}}$ $\boxed{\text{0 סינגולרית לא רגולרית}}$

ג. $y''+6\left(\frac{x}{x-1}\right)y'+3\left(\frac{1}{x-1}\right)y=0 \Leftarrow x=1$ סינגולרית: $\begin{cases} (x-1)\frac{6x}{x-1}=6x \\ (x-1)^{2}\frac{3}{x-1}=3(x-1) \end{cases}$ אנליטיות

לכן $\boxed{x=1 \text{ נק' סינגולרית רגולרית}}$

$a_0=6;\ b_0=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)+6\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=0,-5}$

ד. $y''-\frac{\sin x}{x}y'+\frac{\cos x}{x^{3}}y=0 \Leftarrow x=0$ נק' סינגולרית $x^{2}\frac{\cos x}{x^{3}}=\frac{\cos x}{x}$ לא אנליטית $\Leftarrow$ $\boxed{\text{x=0 נק' סינגולרית לא רגולרית}}$

ה. $y''+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x^{2}}\right)y'+\frac{1}{x^{2}}y=0 \Rightarrow$ $\begin{cases} x\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x^{2}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) \\ x^{2}\left(\frac{1}{x^{2}}\right)=1 \end{cases}$ אנליטיות $\Leftarrow$ $\boxed{\text{x=0 נק' סינגולרית רגולרית}}$

נק' סינגולרית x=0

$a_0=1;\ b_0=1 \Rightarrow \lambda^{2}+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$

ו. $y''+\frac{\operatorname{tg}x}{x^{3}}y=0 \Leftarrow x=0$ נק' סינגולרית: $x^{2}\frac{\operatorname{tg}x}{x^{3}}=\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ אנליטית $\Leftarrow$ $\boxed{\text{x=0 נק' סינגולרית רגולרית}}$

$a_0=0;\ b_0=1 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)+1=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

ב $\left(x-(k+0.5)\pi\right)^{2}\frac{\operatorname{tg}x}{x^{3}}$ אנליטית

בסביבה $x=(k+0.5)\pi$

$\boxed{x=(k+0.5)\pi \text{ נק' סינגולרית רגולרית}}$

$a_0=0;\ b_0=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=1,0}$

3. $y'' + \frac{2x}{(x-2)^2(x+2)} y' + \frac{3}{(x-2)(x+2)} y = 0 \Leftarrow x=2,-2$ נקודות סינגולריות.

$x=2$: $(x-2)\frac{2x}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{2x}{(x-2)(x+2)}$ ⇐ לא אנליטית ב-2

ולכן $\boxed{x=2 \text{ נק' סינגולרית לא רגולרית}}$

$x=-2$: $(x+2)\frac{2x}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{2x}{(x-2)^2}$ ⇐ אנליטיות בסביבת $x=-2$

$(x+2)^2\frac{3}{(x-2)(x+2)} = \frac{3(x+2)}{(x-2)}$

$\boxed{\text{ולכן } x=-2 \text{ נק' סינגולרית רגולרית}}$

$$a_0=-\frac14 \quad b_0=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)-\frac14\lambda = \lambda\left(\lambda-\frac54\right)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0, \frac54}$$

<u>שאלה 2</u>

להראות ש $x=0$ נק' סינגולרית רגולרית למצוא אינדקסים ו-3 איברים ראשונים לא אפסיים של כל אחד מ-2 הפתרונות הב"ת של: $xy''+y'-y=0$

<u>פתרון</u>

$xy''+y'-y=0 \Rightarrow y''+\frac1x y'-\frac1x y=0$ $\left\{\begin{array}{l} x\cdot\frac1x=1 \\ x^2(-\frac1x)=-x \end{array}\right.$ ⇐ אנליטיים

ולכן $x=0$ נק' סינגולרית רגולרית: $a_0=1 \quad b_0=0$

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda = \lambda^2-\lambda+\lambda = \lambda^2=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2}=0}$$

$(xy''+y'-y=0 \Leftrightarrow x^2y''+xy'-xy=0)$

ולכן הפתרונות הם $y_1=(1+c_1x+c_2x^2+\dots)$; $y_2=\ln|x|\, y_1+(d_0x+d_1x^2+\dots)$

נציב את y_1 למד"ר נקבל אחרי כינוס איברים $0=x(c_1-1)+x^2(4c_2-c_1)+x^3(9c_3-c_2)+\dots$

ולכן $c_1=1$; $c_2=\frac14$; $c_3=\frac1{36}$.

נציב את y_2 למד"ר (אנחנו כבר יודעים את y_1...) ונקבל אחרי כינוס איברים:

$$x(2+d_0)+x^2(1+4d_1-d_0)+X^3\left(9d_2+\frac16-d_1\right)+\dots=0$$

ולכן $d_0=-2$, $d_1=-\frac34$; $d_2=-\frac{11}{108}$

כלומר:

$$y_1=\left(1+x+\frac14x^2+\frac1{36}x^3+\dots\right)$$
$$y_2=\ln|x|\left(1+x+\frac14x^2+\frac1{36}x^3+\dots\right)+\left(-2x-\frac34x^2-\frac{11}{108}x^3\right)$$

<u>הערה:</u> ב-y_1 חישבנו 4 מקדמים ראשונים אבל זה הכרחי בשביל לחשב את השלושה הראשונים ב-y_2.