

ביתרון תרגיל 5

מ"ק 27

שאלה 1

למצוא את נק' סינגולריות של המשוואות הבאות:

$$x^2 y'' + \frac{1}{2}(x + \sin x) y' + y = 0 \quad \text{א}$$

$$x y'' + 2x y' + 6e^x y = 0 \quad \text{ב}$$

$$x y'' + \frac{1}{x^2} e^x x y = 0 \quad \text{ג}$$

$$x^3 y'' + 2x y' + x y = 0 \quad \text{ד}$$

$$(x-2)^2 (x+2) y'' + 2x y' + 3(x-2) y = 0 \quad \text{ה}$$

$$x(x-1) y'' + 6x^2 y' + 3x y = 0 \quad \text{ו}$$

$$x y'' - \sin x y' + \frac{\cos x}{x^2} y = 0 \quad \text{ז}$$

ביתרון 2

נק' סינגולריות
של המשוואה

א. $x=0$ נק' סינגולריות של המשוואה $x \cdot 2 = 2x$: $y'' + 2y' + 6\frac{e^x}{x} y = 0$.
 $\begin{cases} x \cdot 2 = 2x \\ x^2 \cdot 6\frac{e^x}{x} \end{cases}$

נמצא את המשוואה $\lambda(\lambda-1) = 0$ $\Rightarrow \lambda = 0, 1$

נק' סינגולריות של המשוואה
של המשוואה

ב. $x = \frac{2}{x}$ נק' סינגולריות של המשוואה $x \cdot \frac{2}{x} = 2$: $y'' + 2\frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$

ג. $x=1$ נק' סינגולריות של המשוואה $(x-1) \frac{6x}{x-1} = 6x$: $y'' + 6(\frac{x}{x-1}) y' + 3(\frac{1}{x-1}) y = 0$.
 $\begin{cases} (x-1) \frac{6x}{x-1} = 6x \\ (x-1)^2 \frac{3}{x-1} = 3(x-1) \end{cases}$

נק' סינגולריות של המשוואה $x=1$

$a_0 = 6; \beta_0 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, -5$

נק' סינגולריות של המשוואה

ד. $x=0$ נק' סינגולריות של המשוואה $x^2 \frac{\cos x}{x^2} = \frac{\cos x}{x}$: $y'' - \frac{\sin x}{x} y' + \frac{\cos x}{x^2} y = 0$

נק' סינגולריות של המשוואה

ה. $x=0$ נק' סינגולריות של המשוואה $x(\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x^2})) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\sin x}{x})$: $y'' + 2(\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x^2}) y' + \frac{1}{x^2} y = 0$.
 $\begin{cases} x(\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x^2})) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\sin x}{x}) \\ x^2(\frac{1}{x^2}) = 1 \end{cases}$ נק' סינגולריות $x=0$

$a_0 = 1; \beta_0 = 1 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

נק' סינגולריות של המשוואה

ו. $x=0$ נק' סינגולריות של המשוואה $x^2 \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x}$: $y'' + \frac{e^x}{x^2} y = 0$

$a_0 = 0; \beta_0 = 1 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $y'' + \frac{2x}{(x-2)^2(x+2)} y' + \frac{3}{(x-2)(x+2)} y = 0$ נקודות סינגולריות

$x=2$: $(x-2) \frac{2x}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{2x}{(x-2)(x+2)} \leftarrow$ לא נמצא נקודות סינגולריות

ולכן $x=2$ נק' סינגולרית לא נמצאת

$x=-2$: $(x+2) \frac{2x}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{2x}{(x-2)^2} \leftarrow$ לא נמצא נקודות סינגולריות

$(x+2)^2 \frac{3}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{(x-2)}$

ולכן $x=-2$ נק' סינגולרית נמצאת

$a_0 = -\frac{1}{4} \quad \theta_0 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1) - \frac{1}{4}\lambda = \lambda(\lambda - \frac{5}{4}) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \frac{5}{4}$

על פניו

ההטות $x=0$ נק' סינגולרית נמצאת. נמצא את הפתרון הכללי של $xy'' + y' - y = 0$: נאסוף את x ונחלק את המשוואה ב- x^2 :

$xy'' + y' - y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x}y = 0$ אנחנו נחלק ב- x^2

$a_0 = 1 \quad \theta_0 = 0$

ולכן $x=0$ נק' סינגולרית נמצאת:

$\lambda(\lambda-1) + \lambda = \lambda^2 - \lambda + \lambda = \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$

$(xy'' + y' - y = 0 \Leftrightarrow x^2 y'' + xy' - xy = 0)$

ולכן הפתרונות הם $y_1 = (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$ ו- $y_2 = \ln|x| + (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots)$

נציב את y_1 למשוואה נקבל: $0 = x(c_1 - 1) + x^2(2c_2 - c_1) + x^3(3c_3 - 2c_2) + \dots$ כינוס איברים
ולכן $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = \frac{1}{36}$

נציב את y_2 למשוואה (אנחנו נבדוק ונראה שזה נכון) ונקבל את x כינוס איברים:
 $x(2 + d_0) + x^2(1 + 4d_1 - d_0) + x^3(9d_2 + \frac{1}{6} - d_1) + \dots = 0$

ולכן $d_0 = -2, d_1 = -\frac{3}{2}, d_2 = -\frac{11}{108}$

כיכנסו:

$y_1 = (1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \dots)$

$y_2 = \ln|x| + (-2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{108}x^3)$

הערה: ה- y_2 חישבנו 4 מקדמים שונים אבל זה התכונת של פתרון כללי של משוואה דיפרנציאלית.