

פתרון - מצד 2 - תרגיל 4

1 שלב

$$L\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n \quad \text{נסמן:}$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

$$L\left(\frac{d}{dx}\right) e^{\lambda x} = p(\lambda) e^{\lambda x} \quad \text{מתקיים}$$

נניח כי λ פתרון מסדר k של $p(\lambda)$.

אזי קיים פולנום $q_k(\lambda)$ כך ש:

$$L\left(\frac{d}{dx}\right) e^{\lambda x} = (\lambda - \lambda)^k q_k(\lambda) e^{\lambda x}$$

$$L\left(\frac{d}{dx}\right) \frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} = L\left(\frac{d}{dx}\right) x^n e^{\lambda x} \quad \text{כיחיד}$$

$e^{\lambda x}$ שצורה ברנז'וסוף עם סדר ולפי λ או x

אכן חשיבות מסדר הסצירה.

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(L\left(\frac{d}{dx}\right) e^{\lambda x} \right) = \frac{d^n}{dx^n} \left((\lambda - \lambda)^k q_k(\lambda) e^{\lambda x} \right)$$

עבור $k < n$, λ מחובר בנסצרת זו הוא מהקורה

$$(\lambda - \lambda)^k \cdot f(\lambda, x) \quad ; \quad \lambda \geq k \quad \text{אכן:}$$

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} L\left(\frac{d}{dx}\right) e^{\lambda x} \right)_{(\lambda, x)} = 0$$

$$0 = L\left(\frac{d}{dx}\right) \frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} = L\left(\frac{d}{dx}\right) x^n e^{\lambda x} \quad \text{ואכן}$$

באותו אופן אנו אנו $x^n e^{\lambda x}$ בקיון של המדר

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

שאלה 2 יציבה במהירות $y = x^r$.

נזכה $0 = x^r (r^3 + 3r^2 + 3r + 1) = x^r (r+1)^3$

אבי'כך הכתרון הנ"ל. $y = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot \frac{\ln x}{x} + C_3 \cdot \frac{x^2 \ln^2 x}{x}$

(ו-1) שרש מרובי 3 ! $(x' = \frac{1}{x})$

אם מתקיים $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ אז לא מתקיים תנאי ההקשר $u(0) = y$.

אין נזיה $(C_1, C_2, C_3) \neq (0, 0, 0)$

ביציבה יציב y לא הייב (ואל מוגדרת ב-0)

אכן ^{פירוק} אין פתרון אבסולוטי קושי הנתון.

שאלה 3

מתוא הכיתרון. $x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0$ על גזית קושי:

א. $0 = u(0) = u'(0)$

ב. $2 = u(0) = u'(0)$

ד. $0 = u(0), 1 = u'(0)$

כיתרון נציב $y = x^r$ במ"ד: $x^2 r(r-1)x^{r-2} + 3x r x^{r-1} - 3x^r = 0$

$x^r ((r+3)(r-1)) = 0$

זמן ידוע 0

$$y = \begin{cases} C_1 |x|^{-3} + C_2 & x > 0 \\ d_1 |x|^{-3} + d_2 & x < 0 \end{cases}$$

$y(0)$ מוגדר לפי רציפות כאשר z , אפשרי.

נשים לב שבמקרה זה ניתן לפתור את המשוואות

זכור ש $x \neq 0$ $y = C_1 x^{-3} + C_2 x$ ו/א.

$$\boxed{y=0} \text{ זכר } -3c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow y'(0) = 0 ; \quad c_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow y(0) = 0 \quad (1)$$

$$\boxed{y=2x} \Leftrightarrow y(6) = 2 ; (y = c_2 x) \quad c_1 = 0 \Leftrightarrow y(0) = 0 \quad (2)$$

(ג) $y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 0$ (כי אחת הביטויים מתקנה) ולא $y = cx$
אבל $y(0) = 1$ לא יכול להיות קיים.

זכר $\boxed{\text{אין פיתרון}}$