

מצ"ג 2 תרגיל 3-כיתרון

מש"ג פיתרון כללי יס:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{t^2}{t^3-1} x_1 - \frac{1}{t^2-1} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{2t}{t^3-1} x_1 + \frac{2t^2}{t^3-1} x_2 \end{cases}$$

בהינתן הפתרון: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון

$$A = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{t^3-1} & -\frac{1}{t^2-1} \\ -\frac{2t}{t^3-1} & \frac{2t^2}{t^3-1} \end{pmatrix} \quad \text{tr} A = \frac{3t^2}{t^3-1}$$

$$e^{\int \text{tr} A dt} = e^{\int \frac{3t^2}{t^3-1} dt} = e^{\ln(t^3-1)+c} = c(t^3-1)$$

$$W = \begin{vmatrix} t & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = tx_2 - x_1 = c(t^3-1)$$

עבור $c=1$: $x_1 = -t^3 + tx_2 + 1$

נציב במשוואת $\dot{x}_2$

$$\dot{x}_2 = \frac{-2t}{t^3-1} (-t^3 + tx_2 + 1) + \frac{2t^2}{t^3-1} x_2 = 2t$$

וקיבלנו $x_2 = t^2 + c_2$ עבור $c=0$: אחרי תכניה תלמד בפיתרון הנתון

$$x_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו

מש"ג 2

$$y'' - y' \tan x + 2y = 0$$

מש"ג פיתרון כללי יס

אם ידוע פתרון פרטי: $y = \sin x$

פיתרון כללי: $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ ו $y_3 = \sin x$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 - \tan x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ולכן} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$W = \sin x y_2 - \cos x y_1 = e^{\int \frac{1}{\cos x} dx} = \frac{c}{\cos x}$$

ואם: (עבור $c=1$) נכפיל ב $\sin^2 x$:

$$\frac{\sin x y_1' - (\sin x)' y_1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x \sin^2 x}$$

$$\left(\frac{y_1}{\sin x}\right)' = \frac{1}{\cos x \sin^2 x} \Rightarrow \frac{y_1}{\sin x} = \int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - \frac{1}{\sin x} + C_1$$

$$y = \frac{1}{2} \sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - 1 + C_1$$

כל הפתרונות הם

$$y = C_1 \sin x + C_2 \left(\sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - 1 \right)$$

3. הקלה

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(x+y+z) \\ \dot{y} = -\sin(y+z) \\ \dot{z} = -\cos(x+y+z) + \sin(y+z) + 2z \end{cases} = F(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial x} \cos(x+y+z) + \frac{\partial}{\partial y} [-\sin(y+z)] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} [-\cos(x+y+z) + \sin(y+z) + 2z] = \end{aligned}$$

$$= -\sin(x+y+z) - \cos(y+z) + \sin(x+y+z) + \cos(y+z) + 2 = 2$$

$$V(0) = 2^3 = \int_{\Omega(0)} dx dy dz; \quad \text{הנפח של הקובץ}$$

$$\dot{V} = \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = 2 \int_{\Omega(t)} dx dy dz = 2V$$

$$\dot{V} = 2V \Rightarrow V(t) = V(0) \cdot e^{2t}$$

$$V(5) = 8 \cdot e^{10} \quad ; \quad \text{הנפח}$$

$$\ddot{x} - t \dot{x} \cos t = \sin t, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad 4 \text{ Pte}$$

$$x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots \quad \text{נניח } K$$

$$\Rightarrow \dot{x} = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \dots$$

$$\ddot{x} = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + \dots$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_0 = 1 \quad \text{(נחיה את קנאי הטלגרף)}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

נניח במידה:

$$(2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + \dots) - t(2c_2 t + 3c_3 t^2 + \dots)(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots) = \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$t^0: 2c_2 = 0 \quad \text{שוויון מקדמים:}$$

$$t^1: 6c_3 = 1$$

$$t^2: 12c_4 - 2c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{6}, c_4 = 0$$

$$x = 1 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \quad \text{כסהה:}$$

$$\Omega = \{(x, \dot{x}, t) : x \in [-2, 2], \dot{x} \in [-1, 1], t \in [0, 1]\} \quad \text{נחבון } \quad \text{ב-}$$

$$|x(t)| = |x(0) + \int_0^t \dot{x} dt| \leq |x(0)| + \left| \int_0^t \dot{x} dt \right| \leq 1 + \left| \int_0^t 1 dt \right| = 1 + t$$

$$|x| \leq 2 \Rightarrow |t| \leq 1 \Rightarrow \varepsilon \leq 1$$

$$|\dot{x}| \leq |\sin t| + |t| |\cos t| + |x| \leq 1 + 1 + 2 = 4$$

$$|\ddot{x}(t)| = \left| \ddot{x}(0) + \int_0^t \ddot{x}(t) dt \right| \leq \underbrace{|\ddot{x}(0)|}_{=0} + \left| \int_0^t \ddot{x} dt \right| = 2|t|$$

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{2} \geq |t| \Leftarrow |\ddot{x}| \leq 1 \quad \text{זו טענה שהמקרה:}$$

$$\ddot{x} = \cos t + \dot{x} \cos t + t \ddot{x} \cos t - t \dot{x} \sin t$$

$$\Rightarrow |\ddot{x}| \leq 1 + 1 + 2 + 1 = 5$$

זו טענה:

$$\ddot{x} = -\sin t - 2\dot{x} \sin t + 2\ddot{x} \cos t + t \ddot{x} \cos t - 2t \ddot{x} \sin t - t \dot{x} \cos t$$

$$\Rightarrow |x^{(4)}| \leq 1 + 2 + 2 \cdot 2 + 5 + 2 \cdot 2 + 1 = 17$$

כסהה: עבור $|t| \leq \frac{1}{2}$ נקח

$$|R| \leq \frac{17}{4!} t^4 \quad \left(M = \frac{17}{24}, \varepsilon = \frac{1}{2} \right)$$