# מד"ר 2 תרגיל 3 - פיתרון

**שאלה 1**

מצא פיתרון כללי ל:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{t^2}{t^3-1} x_1 - \frac{1}{t^3-1} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{2t}{t^3-1} x_1 + \frac{2t^2}{t^3-1} x_2 \end{cases}$$

בהינתן הפיתרון: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

**פיתרון**

$$A = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{t^3-1} & -\frac{1}{t^3-1} \\ -\frac{2t}{t^3-1} & \frac{2t^2}{t^3-1} \end{pmatrix} \qquad trA = \frac{3t^2}{t^3-1}$$

$$e^{\int_{t_0}^{t} trA\,dt} = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{3t^2}{t^3-1}dt} = e^{\ln(t^3-1)+c} = c(t^3-1)$$

$$W = \begin{vmatrix} t & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = t x_2 - x_1 = c(t^3-1)$$

עבור $c=1$ : $x_1 = -t^3 + t x_2 + 1$

נציב במד"ר ל $\dot{x}_2$

$$\dot{x}_2 = \frac{-2t}{t^3-1}(-t^3 + t x_2 + 1) + \frac{2t^2}{t^3-1} x_2 = 2t$$

ולכן $x_2 = t^2 + c_2$ עבור $c=0$: (אחרת תהיה תלות בפיתרון הנתון)

$$x_1 = 1$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

**שאלה 2**

למצוא פיתרון כללי ל $y'' - y' tgx + 2y = 0$

אם ידוע פתרון פרטי: $y = \sin x$

**פיתרון** נגדיר $y_1 = y$ $y_2 = y'$ אז $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ ולכן $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -tgx \end{pmatrix}$

$$W = \sin x\, y_2 - \cos x\, y_1 = e^{\ln\frac{1}{\cos x} + c} = \frac{c}{\cos x}$$

אז: (עבור $c=1$) נכפיל ב $\sin^2 x$ :

$$\frac{\sin x\, y_1' - (\sin x)' y_1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x \sin^2 x}$$

$\left(\frac{y_1}{\sin}\right)' = \frac{1}{\cos x\cdot\sin^2 x} \Rightarrow \frac{y_1}{\sin x} = \int\frac{dx}{\cos x\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - \frac{1}{\sin x}$ ולכן

ולכן $y = \frac{1}{2}\sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - 1$

ולכן פיתרון כללי הוא

$$y = c_1 \sin x + c_2\left(\sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{1/2} - 1\right)$$

<u>שאלה 3</u>

להראות דרך שיטת טורי חזקות שפתרון כללי של המשוואה: $y''-3y'+2x=0$
הוא $y=c_1e^{2t}+c_2e^{t}$.

<u>פיתרון</u>

נציב $y(t)=\sum a_n\cdot t^n$ במשוואה:

$$\sum a_{n+2}(n+2)(n+1)t^n - 3\sum a_{n+1}(n+1)t^n + 2\sum a_n t^n = 0$$

צ"ל צריך ש: $a_{n+2}(n+2)(n+1) - 3a_{n+1}(n+1) + 2a_n = 0$

נקבל נוסחא רקורסיבית: $a_{n+2} = 3\frac{a_{n+1}}{(n+2)} - 2\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$.

עבור $a_0=1$, $a_1=1$ נראה באינדוקציה $a_n=\frac{1}{n!}$

(מתקיים עבור $n=0,1$) נניח עבור $a_k=\frac{1}{k!}$ $\forall k\le n$

$$a_{n+1} = \frac{3}{(n+1)}\frac{1}{n!} - \frac{2}{n(n+1)}\frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

ולכן $y=\sum\frac{t^n}{n!}=e^t$

באותו אופן עבור $a_0=1$ $a_1=2$ נקבל $a_n=\frac{2^n}{n!}$

ואז $y=e^{2t}$

ומכיוון ששני פתרונות אלה בת"ל (צריך להראות) $\underline{y=c_1e^{2t}+c_2e^{t}}$

מ"ש