

פיתרון תרגיל 2

מס' 2

שאלה 1

בוכה את משפט ההשולל של שטורם דרך משפט ההשולל
למשוואות מסדר 1.

משפט ההשולל של שטורם: $q_1(t) \leq q_2(t)$

$$\ddot{x}_1 + q_1(t)x_1 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + q_2(t)x_2 = 0$$

$x_1 \neq 0$, t_1, t_2 שני לבסיס של x כך $x(t) \neq 0 \forall t \in (t_1, t_2)$.

לפי (א) ו (ב) x_2 ישנו לפס ב (t_1, t_2)

$$q_1 \equiv q_2; \quad x_2 = \lambda x_1, \quad x_2(t_1) = x_1(t_1) = 0$$

פיתרון

נבחר קואורדינטות פולריות במרחב הסדרה. $x = r \cos \theta$

$$\dot{x} = r \sin \theta$$

נניח ש x_2 לא לבסיס בקטע (t_1, t_2) אז $\frac{\dot{x}_2}{x_2} = \frac{\dot{x}_1}{x_1} = \frac{\dot{\theta}_1}{\cos \theta_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\cos \theta_2}$ (משוואות מסדר 1).

$$(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1) = \frac{\dot{\theta}_1}{\cos \theta_1} = \left(\frac{\dot{x}_1}{x_1} \right) = -(q_1 + t q_1^2 \theta_1)$$

$$\dot{\theta}_1 = -q_1 \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1 \quad (1)$$

נשתקף על 3 מקרים: (א) $\theta_1(t_1) = \theta_2(t_1) = \pm \frac{\pi}{2}$ (ב) $\theta_1(t_1) < \theta_2(t_1)$ (ג) $\theta_1(t_1) > \theta_2(t_1)$

(א) אם בסוף נשתקף על המקרה של $\theta_1(t_1) = \pm \frac{\pi}{2}$ (המקרה השני בלבד נראה).
ע"י פירוק סימן

אם $\theta_1(t_1) = \theta_2(t_1)$ ויזום (2) ממשיך בהשולל $\theta_1(t_1) > \theta_2(t_1)$
ולכן לא ש קיים $t^* \in (t_1, t_2)$ כך ש $\theta_2(t^*) = \pm \frac{\pi}{2}$ אז $\theta_2(t_2) = \pm \frac{\pi}{2}$ וזה
ממשיך בהשולל $\theta_1 \equiv \theta_2$ ואז $x_1 = \lambda x_2$ וזה סתירה.

$$\theta_1(t_1) < \theta_2(t_1) \Rightarrow \theta_1(t_1) < \theta_2(t_1) \Rightarrow \theta_1(t_1) < \theta_2(t_1)$$

(ג) מכפילים את x_2 ב-1 ואז משיגים פס דף.

שאלה 2

להדריך את מ' האסוס לפיתרון של המשוואה בקטגוריה.
א. $\ddot{x} + \sqrt{t} x = 0 \quad t \in [144, 169]$

ב. $\ddot{x} + 4\dot{x} + \frac{2t + \sin t}{t+1} x = 0 \quad t \in [100, 106]$

ג. $\ddot{x} + \frac{2}{t+1} \dot{x} + (2 + \sin 137t) x = 0 \quad t \in [1000, 1010]$

פיתרון

נשתמש בעזרה ש $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \Delta t \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ עבור $0 < m \leq q \leq M$
בשלי המדר $\ddot{x} + q x = 0$. המיתק ב' 2. אסוס סוקדא.

א. $\frac{\pi}{\sqrt{137}} \leq \Delta t \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ולכן $\left\lfloor \frac{25\sqrt{137}}{\pi} \right\rfloor \leq N \leq \left\lfloor \frac{25\sqrt{2}}{\pi} \right\rfloor - 1$

א $27 \leq N \leq 29$

ב. בשלי לעדבר לעצור הרצויה נכפיל הכל ב e^{2t} ונמא $z = x e^{2t}$.
נקבל:

$$\ddot{z} + \left(\frac{8t + \sin t}{t+1} - 4 \right) z = 0$$

ולכן בקטג המוקד:

$3 \leq N \leq 4$

ג. אם כאן יש צורך לעשות צורב. נאזיר $z = x(t+1)$ ונא $5/6$

$$\ddot{z} + z(2 + \sin 137t) = 0 \quad 1 \leq (2 + \sin 137t) \leq 3$$

ולכן $\frac{\pi}{\sqrt{3}} \leq \Delta t \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

ולכן $3 \leq N \leq 6$