

כיתרון לתרגיל 1 (הקדמה כללית)

מס' 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -2 + \cos x \sin t \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

שאלה 1

$$x(T) = 0$$

$$0 < x\left(\frac{2}{3}\right) < \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{3} < T < 2$$

$$7 < x(5) < 7.7$$

כיתרון
 $1 \leq \dot{x} \leq 1$ ולכן $-3 \leq x \leq 1$ ולכן $0 \leq x\left(\frac{2}{3}\right) < \frac{4}{3}$
 $7 \leq x(5) < 7.7$
 $\frac{2}{3} \leq T \leq 2$

אם שוויונות תצקים מתקבלים כי $\cos x \sin t \neq 1$ ו- $\cos x \sin t \neq -1$.

שאלה 2

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(1) \leq -2, x(5) \leq -2$$

כיתרון
 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 2$ ו- $\sqrt{1+x} \leq -1$ ו- $x = 0$

לכן $x(5) \leq -2$ ו- $x(1) \leq -2$ אם שוויונות מתקבלים כי
 אז היה שוויון לא משהו הפשוט

סתירה $f(x) = 2 \forall x$

שאלה 3

$$\dot{x} = (\cos 3x - \sin x)x$$

$$x(0) = 1$$

$$e^{-2} < x(1) < e^2$$

$$e^{-2} < x(1) < e^2$$

פיתרון

$$2 \leq \cos x - \sin x \leq 2 \quad \text{עבור } x \in \mathbb{R}$$

נראה ש $\cos x - \sin x \geq 2$ אינה נכונה לכל x שלילי.
 נעשה שימוש בזהירות: היות $\cos x$ ו- $\sin x$ הם פונקציות
 הולכות למעלה. מתייחסים לפיתרון
 $x = 0$. התייחסו (ו-1) (0).

דבר 2: תהי $f(x) = \cos x - \sin x$ הפונקציה
 (היא קיימת כמו בדוגמה).
 נניח $f(x) \geq 2$ ונבדוק
 ולכן $f(x) \geq 2$ אינה נכונה.

ולכן

$$-2 \leq \cos x - \sin x \leq 2$$

$$e^{-2} \leq \cos x - \sin x \leq e^2 \quad \text{ולכן}$$

$$e^{-2} \leq \cos x - \sin x \leq e^2$$

ומה באמת נוסח כנראה יש אי שוויון חזק.

$$y(0) = -1, \quad y' \cos x + y \sin x + \sin |y|^{\frac{1}{2}} \sin x - 2 \sin x = 0 \quad N=4.$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 1 - 2 \cos x < y < 3 - 4 \cos x \quad \text{סדרה}$$

$$|x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0$$

$$y' = \tan x (-y + 2 - \sin |y|^{\frac{1}{2}})$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x > 0 \Rightarrow \tan x (1 - y) \leq y' \leq \tan x (3 - y)$$

פונקציות 3 ו-1
ועם תנאי יציבות

$$y' = \tan x (1 - y) \quad \text{ו} \quad y' = \tan x (3 - y) \quad \text{פונקציות מוגבלות}$$

$$1 - 2 \cos x \leq y \leq 3 - 4 \cos x$$

כאשר $0 < x < \frac{\pi}{2}$, הפונקציות אלה יקראו הפונקציות
עליונות ופונקציות תחתיות. הפונקציות אלה הן

$$\sin |3 - 4 \cos x|^{\frac{1}{2}} \equiv 1 \quad \text{אם } x \text{ אינו } \pi$$

$$\sin |1 - 2 \cos x|^{\frac{1}{2}} \equiv -1 \quad \text{אם } x \text{ אינו } \pi$$

שהם גדולים מ-1

$$\text{ד.ע.נ} \quad 1 - 2 \cos x < y < 3 - 4 \cos x \quad \text{עבור } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan x (3 - y) \leq y' \leq \tan x (1 - y) \quad \text{מקרה } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0$$

$$\tan x < 0$$

פונקציות מוגבלות

$$1 - 2 \cos x \leq y \leq 3 - 4 \cos x$$

וגם פונקציות

$$1 - 2 \cos x < y < 3 - 4 \cos x$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \text{כאשר}$$