

2005

11/10/05 13 ד'תשס"ה 27"9N

.K 1

$$\dot{x} = -3x + 2y + x^2$$

$$\dot{y} = x - 4y$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10$$

$$\lambda_{1,2} = -5, -2$$

$$\lambda = -5 \quad \begin{pmatrix} -3+5 & 2 \\ 1 & -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x+y=0 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2 \quad \begin{pmatrix} -3+2 & 2 \\ 1 & -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad x=2y \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= x_1 + 2y_1 \\ y &= -x_1 + y_1 \end{aligned}$$

$$\det E = 3 \quad E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(x - 2y)$$

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + \frac{1}{3}x^2$$

$$y_1 = \frac{1}{3}(x + y)$$

$$\dot{y}_1 = -2y_1 + \frac{1}{3}x^2$$

$$V = x_1^2 + y_1^2 \quad \text{סמך סטנדרטי} \leftarrow \text{פונקציה סטנדרטית}$$

$$\dot{V} = 2x_1(-5x_1 + \frac{1}{3}x^2) + 2y_1(-2y_1 + \frac{1}{3}x^2) =$$

$$= -2(5x_1^2 + 2y_1^2) + \frac{2}{3}(x_1 + y_1)x^2 =$$

$$= -2(\underbrace{5x_1^2 + 2y_1^2}_{=2V}) + \frac{2}{3}(x_1 + y_1)(x_1 + 2y_1)^2$$

$$|x_1| \leq \sqrt{V}, |y_1| \leq \sqrt{V}$$

$$\dot{V} \leq -4V + \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{V} (3\sqrt{V})^2 = -4V + 12V^{\frac{3}{2}}$$

ביקס סטנדרט גרוע גרועה $\Omega = \{(x, y) | V \leq \varepsilon\}$ כך

אם $V \leq \varepsilon \leftarrow \dot{V} \leq 0$, אז Ω יציב בהכרח אינרנטית.

אם $\dot{V} \leq \delta V$, $\delta < 0$ אז יש גם נטייה לירידה.

(אם $\alpha > 0, \delta < 0$, $\dot{V} \leq \delta M^\alpha$, אז נטייה לירידה. אם $\alpha = 1$, אז נטייה לירידה.)

מא-מילן $\dot{V} \leq 0$ מפרק $\dot{V} \leq 0$ כק

$$-4V + 12V^{\frac{3}{2}} \leq 0$$

$$-1 + 3V^{\frac{1}{2}} \leq 0 \quad \text{מחלקים ב-} V > 0 \quad V \neq 0 \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$V \leq \frac{1}{9} \quad \text{כי כבר תחום אינרנל}$$

$$V \leq 0.1 \quad \text{מסגרת תחום משיכה}$$

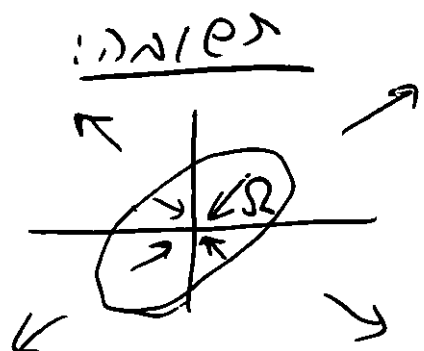
$$\dot{V} \leq -4V + 12V^{\frac{3}{2}} \leq V(-1 + 3V^{\frac{1}{2}}) \quad \text{באנל}$$

$$\leq V(-1 + \frac{3}{\sqrt{10}}) \quad , \quad -1 + \frac{3}{\sqrt{10}} < 0$$

ד.ע.נ

$$\frac{1}{9}(x-2y)^2 + \frac{1}{9}(x+y)^2 \leq 0.1$$

$$(x-2y)^2 + (x+y)^2 \leq 0.9$$



$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + \underbrace{0.01 \sin(\pi t^2 + x^2 + y^2)}_{\xi} \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

ק2

$$|\xi| \leq 0.01 \quad \text{ברור ע}$$

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + \frac{1}{3}\xi$$

$$\dot{y}_1 = -2y_1 + \frac{1}{3}\xi$$

$$\dot{V} = -2(5x_1^2 + 2y_1^2) + \frac{2}{3}(x_1 + y_1)\xi$$

$$\dot{V} \leq -4V + \frac{4}{3} \cdot 0.01 \cdot V^{\frac{1}{2}}$$

$$\Omega = \{(x,y) | V \leq \varepsilon\} \quad \text{בריק למצוא תחום נצורה}$$

כך ע $\varepsilon \leq V \leq \delta < 0 \leq \dot{V}$ אם Ω יהיה אינרנל
א'ע'ח כל הטראיקטוריות בשמן סוף.

מ $\dot{V} \leq 0$ מקבלים משהם כק

$$-4V + \frac{4}{3} \cdot 0.01 \cdot V^{\frac{1}{2}} \leq 0$$

$(x,y) \neq (0,0) \quad \forall \epsilon > 0 \quad V \neq 0 \quad \Rightarrow V^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{3} \epsilon$

$$V^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{3} 10^{-2}$$

$$V \geq 10^{-4} \cdot \frac{1}{9}$$

$$V \geq 10^{-4}$$

נ"פ

$$\Omega = \{(x,y) \mid V \leq 10^{-4}\}$$

$$\dot{V} \leq -4V + \frac{4}{3} 0.01 V^{\frac{1}{2}}$$

נ"פ $V \geq 10^{-4}$ נ"פ

$$\leq -4 V^{\frac{1}{2}} (V^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} 0.01) \leq -4 \cdot 10^{-2} (0.01 - \frac{1}{3} 0.01) < 0 \quad \text{נ"פ}$$

$$\frac{1}{9} (x-2y)^2 + \frac{1}{9} (x+y)^2 \leq 10^{-4}$$

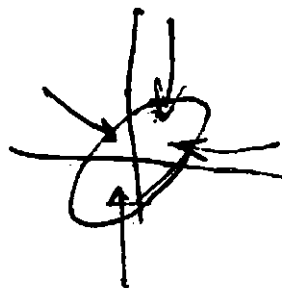
נ"פ

$$\boxed{(x-2y)^2 + (x+y)^2 \leq 9 \cdot 10^{-4}}$$

נ"פ δ נ"פ

$$\boxed{(x-2y)^2 + (x+y)^2 \leq 10^{-3}}$$

נ"פ (נ"פ)



$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + y + y^3 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$\lambda = -1 \pm 2i$

$$\lambda_1 = -1 - 2i \quad \begin{cases} (-3+1+2i)x + 4y = 0 \\ -2x + (1+1+2i)y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-2+2i)x + 4y = 0 \\ -2x + (2+2i)y = 0 \end{cases}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 + 2i, \quad e_2 = \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}i \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}$$

$\det E = 2i$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & i+1 \\ +i & -i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}i(y-x) \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}i(y-x) \end{pmatrix}$$

מ"ע מ"ע x, y , מ"ע מ"ע y, x

$$V = |x_1|^2 + |y_1|^2 =$$

פונקציה סקלרית
מ"ע מ"ע

$$V = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} (x-y)^2$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= y\dot{y} + (x-y)(\dot{x}-\dot{y}) = y(-2x+y+y^3) + (x-y)(-x+3y-y^3) \\ &= \underbrace{-y^2 - (x-y)^2}_{-2V} + y^4 - (x-y)y^3 \end{aligned}$$

$y^4 \leq (2V)^2 = 4V^2$
 $|(x-y)y^3| \leq (2V)^{3/2} (2V)^{1/2}$

$$\dot{V} \leq -2V + 8V^2$$

$V \leq \varepsilon$ מ"ע מ"ע מ"ע מ"ע מ"ע מ"ע

$\delta < 0, \quad \dot{V} \leq \delta V$ כ"כ מ"ע מ"ע

$$-2V + 8V^2 \leq 0 \quad \text{מ"ע מ"ע מ"ע מ"ע} \quad \dot{V} \leq 0 \quad \text{מ"ע מ"ע}$$

$V \leq \frac{1}{4}$ $\Leftarrow V \neq 0$

$$\rho \leq \frac{1}{5} \quad \text{נקודה } V \leq \frac{1}{5}$$

$$\Omega = \{(x, y) \mid V \leq \frac{1}{5}\}$$

$$\dot{V} \leq -2V + 8V^2 = -2V(1 - 4V) \quad \text{אם } V \leq \frac{1}{4} \cdot N \text{ אז}$$

$$\leq -2V(1 - \frac{4}{5}) = -\frac{2}{5}V \Rightarrow \text{אם } V \leq \frac{1}{5} \text{ אז } \dot{V} \leq -\frac{2}{5}V$$

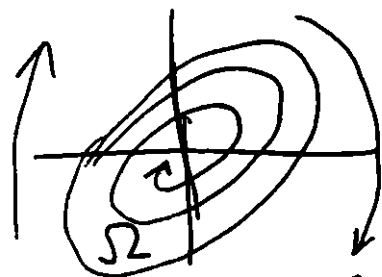
$$\dot{V} \leq -2V + 8V^2 \leq -2 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot (\frac{1}{5})^2$$

אם $V \leq \frac{1}{5}$

$$\dot{V} \leq -2 \cdot 0 + 8 \cdot (\frac{1}{5})^2 = \frac{8}{25}$$

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 \leq \frac{1}{5}$$

$$y^2 + (x-y)^2 \leq \frac{2}{5}$$



(האזור Ω הוא מעגלי)

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + y + 0.01 \sin(\pi t^2 + t + x^2 y) \end{cases}$$

$$\xi, \quad |\xi| \leq 0.01$$

$$V = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2$$

$$\dot{V} = -2V + \xi(y - (x-y)) \leq -2V + 2\sqrt{2} \cdot 0.01 \cdot V^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq -2V + 0.03 V^{\frac{1}{2}}$$

$$-2V + 0.03 V^{\frac{1}{2}} \leq 0$$

$$V^{\frac{1}{2}} \geq 0.015$$

$$V \geq 2.25 \cdot 10^{-4}$$

$$\Omega = \{(x, y) \mid V \leq 3 \cdot 10^{-4}\}$$

$$\rho \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow V \leq 0$$

$$\Leftrightarrow V \neq 0 \text{ אז}$$

אם $V \leq 0$ אז $\rho \leq \frac{1}{5}$

$$\text{suppose } V \geq 3 \cdot 10^{-4} \text{ s.k.}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2V + 0.01 \cdot 2\sqrt{2} \cdot V^{\frac{1}{2}} \leq V^{\frac{1}{2}} (-2V^{\frac{1}{2}} + 0.01 \cdot 2\sqrt{2}) \leq \\ &\leq V^{\frac{1}{2}} (-2\sqrt{3} \cdot 10^{-2} + 0.01 \cdot 2\sqrt{2}) \\ &\leq V^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 10^{-2} (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \stackrel{\wedge}{=} 0 \leq \sqrt{3} \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} (\sqrt{2} - \sqrt{3}) < 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} (x-y)^2 \leq 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\Omega: \boxed{y^2 + (x-y)^2 \leq 6 \cdot 10^{-4}}$$

suppose

