2004/5
סמ' ב

מד"ר 2 - פיתרון 10

הערה:
ע"ע - ערכים עצמיים
פ"ע - פונקציות עצמיות.

שאלה 1

לפתור את הבעיות הלא הומוגניות הבאות:

א) $\begin{cases} u''+4u=\cos x \\ u'(0)=u'(\pi)=0 \end{cases}$

ב) $\begin{cases} u''+4u=\cos 2x+\cos 3x \\ u'(0)=u'(\pi)=0 \end{cases}$

פיתרון

א) $\lambda+4>0$:

$$\begin{cases} u''+4u+\lambda u=0 \\ u'(0)=u'(\pi)=0 \end{cases} \Rightarrow u''+(4+\lambda)u=0$$

(קל להראות שהבעיה המקורית לא שלילית)

ולכן $u=A\cos(\sqrt{4+\lambda}\,x)+B\sin(\sqrt{4+\lambda}\,x)$

נבדוק תנאי שפה:

$u'(0)=0 \Rightarrow \sqrt{4+\lambda}\,B=0 \quad (1)$

$u'(\pi)=0 \Rightarrow -\sqrt{4+\lambda}\,A\sin(\sqrt{4+\lambda}\,\pi)=0 \quad (2)$

$$(1) \Rightarrow \quad B=0 \Rightarrow \sqrt{4+\lambda}\,\pi=n\pi \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\lambda_n=n^2-4 \\ u_n=\cos nx\end{array}} \quad n=0,1,2,\dots$$

$(*)\ \lambda+4=0 \Rightarrow u''=0 \Rightarrow u=ax+b \overset{\text{תנאי שפה}}{\Rightarrow} u=1$ המקרה $(*)$ מתאים ל $n=0$

ניגש לפתרון הבעיה הלא הומוגנית: נפרק את u (הפיתרון) לטור של פ"ע

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+4\right)u=\sum a_n\left(\frac{d^2}{dx^2}+4\right)\cos nx=-\sum a_n(n^2-4)\cos nx \overset{\text{רוצים}}{=} \cos x$$

$n=1:\ n^2-4=-3 \quad u_1=\cos x \Rightarrow -\frac{1}{3}(1^2-4)\cos x=\cos x \Rightarrow a_1=\frac{1}{3}$

$n=2:\ n^2-4=0 \quad u_2=\cos 2x \Rightarrow -a_2(2^2-4)\cos 2x=0 \Rightarrow a_2$ - שרירותי

$n\neq 1,2 \quad -a_n(n^2-4)\cos nx=C\cos nx \Rightarrow a_n=0$

ולכן הפיתרון הכללי הוא מהצורה

$$u=\frac{1}{3}\cos x+C\cos 2x$$

הערה חשובה!: צריך לבדוק ש $4-\lambda<0$ לא נותן ע"ע!!

ג) הבעיה ההומוגנית היא אותה הבעיה ולכן יש כאן אותה פ"ע ! ע"ע
צד ימין כבר מפורק לסכום של פ"ע
בשביל לקבל $x\cos 2x$ בצד ימין:

$$n=2 \quad u_2=\cos 2x \quad -a_2\,(2^2-4)\cos 2x=0$$

ולכן לא נוכל לקבל $x\cos 2x$.

ולכן אין פיתרון!

<u>הערה</u>: באופן כללי אם יש ע"ע $\lambda=0$ אי אפשר לקבל בצד ימין את הפ"ע שלו.

<u>שאלה 2</u>

לאיזה α יש פיתרון פורמלי בע"ש ומהו? (הם?)

$$\begin{cases} u''+9\pi^2 u = \alpha \sin 3\pi x + 1 \\ u(0)=0 \quad u(1)=0 \end{cases}$$

<u>פיתרון</u>

(קל לראות שהבעיה לא רגולרית)

$$\begin{cases} u''+(9\pi^2+\lambda)u=0 \\ u(0)=0 \quad u(1)=0 \end{cases}$$

אם <u>$\lambda+9\pi^2>0$</u>: $u=A\sin(\sqrt{9\pi^2+\lambda}\,x)+B\cos(\sqrt{\cdots}\,x)$

$$u(0)=0 \Rightarrow B=0$$

$$u(1)=0 \Rightarrow \sin(\sqrt{9\pi^2+\lambda})=0 \quad (\text{אם } u\neq 0)$$

$$u_n=\sin n\pi x \qquad \lambda=(n^2-9)\pi^2 \qquad n=1,2,\dots$$

אם <u>$\lambda+9\pi^2=0$</u>: $u=ax+b$ ומתנאי שפה $u=0$. (זה לא ע"ע)

אם <u>$\lambda+9\pi^2<0$</u> מתנאי שפה מקבלים ש- $u=0$ ולכן אין ע"ע.

נפרק את צד ימין לטור של פ"ע: $1=\sum a_n u_n$

$$a_n=\frac{\langle 1,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}=\frac{\int_0^1 \sin(\pi k x)\,dx}{\int_0^1 \sin^2(\pi k x)\,dx}=\begin{cases} 0 & k \text{ זוגי} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

לא יהיה פיתרון אם המקדם של $\sin 3\pi x$ הוא לא 0 (כי זו הפ"ע של $\lambda=3$).

ולכן נבחר $\boxed{\alpha=-\frac{4}{3\pi}}$.

ואז הפיתרון הנו

$$\boxed{u=\sum_{\substack{n=0\\n\neq 3}}^{\infty}-\frac{4}{(2n+1)\pi^3((2n+1)^2-9^2)}\sin((2n+1)\pi x)+C\sin(3\pi x)}$$

<u>שאלה 3</u>

לפתח את $f=\sin x$ לטור פוריה של פ"ע של בעית שטורם-ליוביל:

$$\begin{cases}u''+u+\lambda u=0\\ u'(0)=0 \quad u'(\pi)=0\end{cases}$$

<u>פיתרון</u>

$$u''+(1+\lambda)u=0$$

<u>$1+\lambda=0$</u>: $u=c_1x+c_2$ מתנאי שפה $u=c_2$ ולכן זהו ע"ע עם פ"ע $u=1$.

<u>$1+\lambda<0$</u>: $u=c_1e^{\sqrt{-1-\lambda}\,x}+c_2e^{-\sqrt{-1-\lambda}\,x}$ מתנאי שפה מקבלים $u=0$ (אין ע"ע)

<u>$1+\lambda>0$</u>: $u=c_1\cos\sqrt{1+\lambda}\,x+c_2\sin\sqrt{1+\lambda}\,x$ מתנאי שפה מקבלים: $\lambda_n=n^2-1$, $u_n=\cos nx$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx.$$

$$c_0=\frac{\int_0^\pi \sin x\cdot 1\,dx}{\int_0^\pi 1^2dx}=\frac{2}{\pi}$$

$$n\neq 0 \quad c_n=\frac{\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx}{\int_0^\pi \cos^2 nx\,dx}=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1}+\frac{\cos((n-1)\pi)}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]=$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n-1}\right] & n=2k\end{cases}=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & n=2k\end{cases}$$

$$\boxed{\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2-1}\cos((2n)x)}$$