

## עבודה-3

1. להוכיח שהפתרון של בעיית קושי  $y' = \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2} y$ ,  $y(0) = 1$ , מקיים את האי-שוויונות  $e^{-x} > y > e^x$  כאשר  $x < 0$  ו- $e^{-x} < y < e^x$  כאשר  $x > 0$ .

2. להעריך מספרי אפסים של פתרונות המשוואה  $\ddot{x} + \frac{4t^2 + t \cos x}{t^2 + 1} x = 0$  בקטע [1003,1013]. לנמק. שימו לב שהמשוואה לא ליניארית.

3. מה הוא נפח התחום שאליו עובר הריבוע  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$  כעבור  $\pi$  יחידות זמן כתוצאה מהתנועה מתוארת על-ידי מערכת המשוואות הבאה? מה אפשר לסכם על יציבות של הפתרון האפסי? לנמק.

$$\begin{cases} \dot{x} = (\sin^2 t)x - 3ye^{-t^2} + \arctan(ty), \\ \dot{y} = \sin(t^2 + 1)x + (\cos^2 t)y \end{cases}$$

4. א. מצא את המקדמים  $c_0, \dots, c_4$  של פיתוח טיילור  $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + o(t^4)$  בסביבה של  $t = 0$  לפתרון בעיית קושי  $\ddot{x} + 2\dot{x}(1 - \cos t) + x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ .  
 ב. הערך את השארית  $R(t) = x - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - c_3 t^3$  דרך מציאת הקבועים  $\varepsilon > 0, M > 0$  שעבורם בסביבה  $|t| \leq \varepsilon$  מתקיימת ההערכה  $|R(t)| \leq Mt^4$ .

5. למיין נקודות סינגולריות (כולל  $\infty$ ) של המשוואה  $(x^2 - x - 6)y'' - 10 \frac{\sin(x^2 - x - 6)}{(x^2 - x - 6)} y' - \frac{125x^3}{4(x+2)(x-3)^2} y = 0$ . לנמק מהם התנאים הבאים שאפשר לקיים אם  $y$  אינו אפס זהותי:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{-1} y(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} (x+2)^{-3} y(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} (x+2)^{-2} y(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} (x+2)^{-1} y(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)x^{-3} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)x^3 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)x^{-8} = 0.$$

6. מצא את פונקציית גרין, השתמש בה ובטא את הפתרון לבעיית ערך השפה דרך אינטגרלים של פונקציות אלמנטריות, 
$$\begin{cases} u'' - 9u = e^{3x} \\ u'(0) + u(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases}$$

7. איזה מבעיות השפה הרשומות מטה צמודות לעצמן? לנמק.

$$\begin{cases} u'' \sin x - u \cos x = 0 \\ u(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u''(x+1)^{-1} - u'(x+1)^{-2} = 0 \\ u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u''(x+1)^{-1} - 2u'(x+1)^{-2} = 0 \\ u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 0 \end{cases}$$

8. למצוא את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\begin{cases} u'' + u + \lambda u = 0 \\ u'(0) - u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

9. לבדוק את יציבותם האסימפטוטית של הפתרונות לבעיות קושי הרשומות למטה. תנאי התחלה אפסיים בכל המקרים. לנמק בצורה קצרה.

$$\begin{aligned} & \ddot{x} - \dot{x} + \pi x = 0 ; \ddot{x} + \dot{x} + 2\dot{x} + 3x = t ; x^{(5)} - \ddot{x} = \arctan t \\ & \dot{x} = -|x| , \dot{x} = x^3 - \sin x , \dot{x} = -x \sin x ; \ddot{x} + \sqrt{3}\dot{x} + \sqrt{2}x = 0 ; \ddot{x} + \dot{x} + 3\dot{x} + 2x = t \end{aligned}$$

10. לבדוק את יציבותם האסימפטוטית של הפתרונות ל  $\ddot{x} + \dot{x} \sin t - 2\dot{x} + x \cos t = t$ , לנמק.

11. לצייר את דיוקני הפזה של המערכות למיין את הנקודות הקריטיות.

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - 3y - 9 \\ \dot{y} = 4x - y - 5 \end{cases} , \begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 3 \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases} , \begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = 2x + 3y - 3 \end{cases} , \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1 \\ \dot{y} = 2x - 3y + 1 \end{cases}$$

12. למצוא תחום קומפקטי אינווריאנטי במישור  $xy$  כזה שכל הקווים הפזיים של המערכת

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + 0.01 \cos(x^2 - 1000t) \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

נכנסים אליו כדי להישאר בו לתמיד.

13. למצוא תחום קומפקטי סביב 0 עם חלק פנומי לא רייק במישור  $x, y$  כזה שכל הפתרונות של

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + y^4 \cos(x^2 - 1) \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

המתחילים בו, מתכנסים אסימפטוטית ל-0 ללא עזיבת התחום.

14. למצוא את ערכי הפרמטרים  $\alpha, \beta$  שעבורם הפתרונות הקבועים של המשוואה  $\ddot{x} + \alpha \sin \dot{x} - \beta \cos(\dot{x} - 2x) = 0$  יציבים בקירוב הראשון.

**בהצלחה!**