

## עבודה-2

1. להוכיח שהפתרון של בעיית קושי  $y' = \frac{x^4 \cos x}{x^4 + y^2} y$ ,  $y(0) = 1$ , מקיים את האי-שוויונות  $y(1) < e$ ,  $y(-1) < e$ .

2. להעריך מספר האפסים של פתרונות המשוואה  $\ddot{x} + \frac{4t + \cos x}{t+1} \dot{x} = 0$  בקטע  $[100, 104]$ . לנמק. שימו לב שהמשוואה לא ליניארית.

3. מה הוא נפח התחום שאליו עובר הריבוע  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 1$  כעבור  $20\pi$  יחידות זמן כתוצאה מהתנועה מתוארת על-ידי מערכת המשוואות הבאה? מה אפשר לסכם על תכונות יציבות של הפתרון האפסי? לנמק.

$$\begin{cases} \dot{x} = (\cos^2 t)x - 3y \sin t + \sin(ty), \\ \dot{y} = \ln(t^2 + 1)x + (\sin^2 t)y \end{cases}$$

4. א. מצא את המקדמים  $c_0, \dots, c_4$  של פיתוח טיילור  $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + o(t^4)$  בסביבה של  $t = 0$  לפתרון בעיית קושי  $\ddot{x} + 3\dot{x}(1 + \cos t) + x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ .  
 ב. הערך את השארית  $R(t) = x - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - c_3 t^3$  הקבועים  $M > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , שעבורם בסביבה  $|t| \leq \varepsilon$  מתקיימת ההערכה  $|R(t)| \leq Mt^4$ .

5. למיין נקודות סינגולריות (כולל  $\infty$ ) של המשוואה  $(x^2 + 2x - 3) \sin \pi x y'' + 8\pi(x+3)y' + 6\pi y = 0$  לרגולריות ולא רגולריות, ולמצוא אופייניהם. לנמק מהם התנאים הבאים שאפשר לקיים אם  $x$  אינו אפס זהותי:

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} (x+3)^{-1} y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -3+0} (x+3)^{7/2} y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -3+0} (x+3)^{-2} y(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -3+0} (x+3)^{-1} y(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2.5+0} (x-2.5)^{-1} y(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -3+0} (x+3)^{5/2} y(x) = 1$$

אף אחד.

6. מצא את פונקציית גרין לבעיית השפה  $\begin{cases} u'' + 9u = \arctan x \\ u'(0) = 0, u(\pi) + u'(\pi) = 0 \end{cases}$ , השתמש בה ובטא את הפתרון לבעיית ערך השפה דרך אינטגרלים של פונקציות אלמנטריות.

7. איזה מבעיות השפה הרשומות מטה צמודות לעצמן? לנמק.

$$\begin{cases} (u' \sin x)' + u = 0 \\ u(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u'' \ln(x+1) - u'(x+1)^{-1} = 0 \\ u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u'' \ln(x+1) + u'(x+1)^{-1} = 0 \\ u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 0 \end{cases}$$

8. למצוא את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\begin{cases} u'' - u + \lambda u = 0 \\ u'(0) + u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

9. לבדוק את יציבותם האסימפטוטית של הפתרונות לבעיות קושי הרשומות למטה. תנאי התחלה אפסיים בכל המקרים. לנמק בצורה קצרה.

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 2x = e^{-t}, \ddot{x} + 5\dot{x} + 2x + 16x = e^{-\sin t}, x^{(4)} + 2\ddot{x} + 5\dot{x} - x = 1$$

$$\dot{x} = -x^{2/3} \cos x, \dot{x} = -x^2 \operatorname{sign} x, \dot{x} = -x \sin x, \dot{x} = -x^3 \cos x^2$$

10. לבדוק את יציבותם האסימפטוטית של הפתרונות ל  $\ddot{x} + (t+1)^{-2}\dot{x} - 2x + x \cos t = \sin t$  לנמק.

11. לצייר את דיוקני הפזה של המערכות, למיין את הנקודות הקריטיות.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 9y + 5 \\ \dot{y} = x - 2y + 1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 3 \\ \dot{y} = x + y + 1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1 \\ \dot{y} = 2x - 3y + 1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = 2x + 3y - 3 \end{cases}$$

12. למצוא תחום קומפקטי אינווריאנטי במישור  $xy$  כזה שכל הקווים הפזיים של המערכת

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + 0.01 \cos(x^2 + y^3 + t^2) \\ \dot{y} = 5x - 6y \end{cases}$$

נכנסים אליו כדי להישאר בו לתמיד.

13. למצוא תחום קומפקטי סביב 0 עם חלק פנומי לא רייק במישור  $x, y$  כזה שכל הפתרונות של  $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + y^3 \cos t \\ \dot{y} = 5x - 6y \end{cases}$

המתחילים בו, מתכנסים אסימפטוטית ל-0 ללא עזיבת התחום.

14. למצוא את הפתרונות הקבועים של המשוואה  $\ddot{x} + 2 \sin \dot{x} - \cos(\dot{x} + 2x) = 0$  ולבדוק את יציבותם.

בהצלחה!