

## עבודה-1

1. להוכיח שהפתרון של בעיית קושי  $\dot{x} = (2 + \cos(t^2 x))x$ ,  $x(0) = 1$ , מקיים את האי-שוויון  $e^t < x(t) < e^{3t}$  כאשר  $t > 0$  -  
 $e^t > x(t) > e^{3t}$  כאשר  $t < 0$ .

2. להעריך מספר האפסים של פתרונות המשוואה  $\ddot{x} + \frac{8t - \cos(x+t)}{2t+1}x = 0$  בקטע  $[10000, 10007]$ . לנמק. שימו לב שהמשוואה לא ליניארית.

3. מה אפשר לסכם על יציבותו של הפתרון האפסי של המערכת 
$$\begin{cases} \dot{x} = (\cos^2 t)x - 3ty + \arctan zy \\ \dot{y} = \sin tx - \frac{1}{2}y \cos t + tz \\ \dot{z} = -\arctan(tx) + 3t^2 y + (\sin^2 t)z \end{cases}$$
 לנמק. מה הוא נפח התחום שאליו עוברת הקובייה  $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$  הנתונה ב- $t = 0$  כעבור  $20\pi$  יחידות הזמן?

4. א. מצא את המקדמים  $c_0, \dots, c_4$  של פיתוח טיילור  $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + o(t^4)$  בסביבה של  $t = 0$  לפתרון בעיית קושי  $\ddot{x} + \dot{x} \cos t - x = \cos^2 t$ ,  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = -1$ .

ב. הערך את השארית  $R(t) = x - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - c_3 t^3$  דרך מציאת הקבועים  $\varepsilon > 0, M > 0$  שעבורם בסביבה  $|t| \leq \varepsilon$  מתקיימת ההערכה  $|R(t)| \leq Mt^4$ .

5. למיין נקודות סינגולריות (כולל  $\infty$ ) של המשוואה  $(x^2 - 4x - 5)y'' + 18y' - 18 \frac{\arctan(x-5)}{(x-5)^2} y = 0$  לרגולריות ולא

רגולריות, ולמצוא אופייניהם. לנמק מהם התנאים הבאים שאפשר לקיים אם  $y$  אינו אפס זהות:  $\lim_{x \rightarrow 5+0} (x-5)^{-1} y(x) = 1$ ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1+0} y(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1+0} (x+1)^{-5} y(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1+0} (x+1)^{-3} y(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 5+0} (x-5)^2 y(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 y(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{-1} y(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ . אף אחד.

6. בטא פתרון לבעיית השפה 
$$\begin{cases} u'' - 4u = e^{-x^2} \\ u'(0) - u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$
 דרך אינטגרלים של פונקציות אלמנטריות.

7. איזה מבעיות השפה הרשומות מטה צמודות לעצמן? לנמק.

$$\begin{cases} -u'' \sin x - u' \cos x + u = x \\ u(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases}, \begin{cases} u'' \ln(x+1) - u'(x+1)^{-1} + xu = e^x \\ u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 0 \end{cases}, \begin{cases} u'' \ln(x+1) + u'(x+1)^{-1} + xu = e^x \\ u(0) = 0, u'(1) - u(1) = 0 \end{cases}$$

8. למצוא את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם - ליאוביל

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) - u'(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

9. לבדוק את יציבותם האסימפטוטית של הפתרונות לבעיות קושי הרשומות למטה. תנאי התחלה אפסיים בכל המקרים. לנמק בצורה קצרה.

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 16x = e^{-t}, \ddot{x} + 5\dot{x} + 3x + 16x = e^{-\sin t}, x^{(4)} + 2\ddot{x} - 5\dot{x} + 3x = 1$$

$$\dot{x} = -x^{1/3} \cos x, \dot{x} = -x^2 \sin x, \dot{x} = -x \sin x, \dot{x} = -x^3 \sin x^2$$

10. לבדוק את יציבותם האסימפטוטית של הפתרונות לבעיית קושי  $\ddot{x} + t \cos(t^2 - 1)\dot{x} + x = e^{-t}$ , לנמק.

11. לצייר את דיוקני הפזה של המערכות למיין את הנקודות הקריטיות.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - 2 \\ \dot{y} = 4x - 2y - 2 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 3 \\ \dot{y} = x + y + 1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 2 \\ \dot{y} = x + 4y - 1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = 3x + y - 4 \\ \dot{y} = x + 3y - 4 \end{cases}$$

12. למצוא תחום קומפקטי אינווריאנטי במישור  $xy$  כזה שכל הקווים הפזיים של המערכת  $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 0.01 \cos(t^3 + xy) \\ \dot{y} = 3x - 4y - 0.01 \cos(t^4 - xy) \end{cases}$  נכנסים אליו כדי להישאר בו לתמיד.

13. למצוא תחום קומפקטי סביב 0 עם חלק פנומי לא ריק במישור  $x, y$  כזה שכל הפתרונות של  $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + y^2 \sin(100t) \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}$  המתחילים בו, מתכנסים אסימפטוטית ל-0 ללא עזיבת התחום.

14. מה הם הערכים של  $\alpha \in \mathbf{R}$  שבשבילם הנקודה הקריטית בראשית יציבה לפי הקירוב הראשון?  $\begin{cases} \dot{x} = \sin(\alpha x + y) + x \cos y \\ \dot{y} = \frac{2}{\pi} \alpha \cos(\frac{\pi}{2} e^{\alpha x} - \pi y) + \tan(\alpha y) + 2x \end{cases}$

בהצלחה!