

משך הבחינה: 3 שעות

חומר מותר לשימוש: שני דפים A4 אישיים הממלאים בכתב יד משני הצדדים. מחשבון מותר אבל מיותר.
יש לענות על 4 שאלות בלבד ולציין את מספרי השאלות במחברת.
כל שאלה שווה ל-25 נקודות.

.1

א. (10 נק') לבדוק את היציבות האסימפטוטית של הפתרון לבעיית קושי

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x} + (t+1)^{-2} \dot{x} - 2\dot{x} + x \cos t = \sin t$$

ב. (15 נק') למצוא את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\begin{cases} u'' - u + \lambda u = 0 \\ u'(0) + u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

.2

א. (11 נק') מצא את המקדמים c_0, \dots, c_4 של פיתוח טיילור $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + o(t^4)$ בסביבה של $t = 0$ לפתרון בעיית קושי

$$\ddot{x} + 3\dot{x}(1 + \cos t) + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

ב. (14 נק') הערך את השארית $R(t) = x - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - c_3 t^3$ דרך מציאת הקבועים $\varepsilon > 0, M > 0$ שעבורם בסביבה $|t| \leq \varepsilon$ מתקיימת ההערכה $|R(t)| \leq M t^4$. ידוע ש- $2 < e < 3$.

.3

א. (12 נק') למיין נקודות סינגולריות (כולל ∞) לרגולריות ולא רגולריות של המשוואה

$$(x^2 - x - 6)y'' - 5 \frac{(x+3)\sin(x^2 - 4)}{(x+2)} y' + 10 \frac{x^3 - 4x^2 + 13x}{(x+2)(x-3)^2} y = 0$$

ב. (13 נק') איזה מן התנאים הבאים אפשר לקיים? לנמק. $\lim_{x \rightarrow 2+0} (x-2)^{-1} y(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)/x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} (x-2)^{-3} y(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} (x-2)^{-4} y(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)x^{-1/2} = 1$, אף אחד.

.4

א. (13 נק') למצוא את הפתרונות הקבועים של המשוואה $\ddot{x} + 2 \sin \dot{x} - \cos(\dot{x} + 2x) = 0$ ולבדוק את יציבותם.

ב. (12 נק') לצייר את הדיוקנים הפזיים של המערכות

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = 2x + 3y - 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1 \\ \dot{y} = 2x - 3y + 1 \end{cases}$$

למיין את הנקודות הקריטיות.

5. למצוא תחום קומפקטי סביב הראשית, שכל הקווים הפזיים נכנסים אליו תוך זמן סופי כדי להישאר בו לתמיד,

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + 0.01 \cos(x^2 + y^3 + t^2) \\ \dot{y} = 5x - 6y \end{cases}$$

בהצלחה!