

משך הבחינה: 3 שעות

חומר מותר לשימוש: שני דפים A4 אישיים הממולאים בכתב יד משני הצדדים.  
יש לענות על 4 שאלות בלבד ולציין את מספרי השאלות במחברת.  
כל שאלה שווה ל-25 נקודות.

1.

א. (16 נק') להוכיח שהפתרון של בעיית קושי  $y(0) = 1, y' + 2y \cos(y^2 + 12x) + e^{-x} = 0$  מקיים את האי-שוויון  $y(\ln 2) > 0$ . רמז: להשוות עם משוואה נוחה יותר.

ב. (9 נק') לבדוק את היציבות של הפתרון לבעיית קושי

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x} - (t+1)^{-1} \dot{x} + \dot{x} - x = \sin t$$

2.

א. (11 נק') מצא את המקדמים  $c_0, \dots, c_4$  של פיתוח טיילור  $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + o(t^4)$  בסביבה של  $t = 0$  לפתרון בעיית קושי (המקדם של  $\dot{x}$  מוגדר ב-0 לפי הרציפות)

$$\ddot{x} - 2\dot{x}(1 - \sin t) + x = e^t, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

ב. (14 נק') הערך את השארית  $R(t) = x - c_0 - c_1 t - c_2 t^2 - c_3 t^3$  דרך מציאת הקבועים  $\varepsilon > 0, M > 0$  שעבורם בסביבה  $|t| \leq \varepsilon$  מתקיימת ההערכה  $|R(t)| \leq Mt^4$ . ידוע ש- $2 < e < 3$ .

3.

מצא את פונקציית גרין ופתור את בעיית ערך השפה

$$\begin{cases} u'' + 4u = 1 \\ u'(0) + u(0) = 0, u(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

4.

א. (13 נק') למצוא את הפתרונות הקבועים של המשוואה  $\ddot{x} + \dot{x} + 2 \cos(\dot{x} - x) = 0$  ולבדוק את יציבותם.

ב. (12 נק') לצייר את הדיוקנים הפזיים של המערכות  $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y \\ \dot{y} = 3x - 6y + 9 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y + 5 \end{cases}$  למיין את

הנקודות הקריטיות.

5. למצוא את התחום שכל הקווים הפזיים נכנסים אליו כדי להישאר בו לתמיד

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 0.01 \cos(x^2 + y^3 + t^2) \\ \dot{y} = 5x - 5y \end{cases}$$

בהצלחה!