

משך הבחינה: 3 שעות

חומר מותר לשימוש: שני דפים A4 אישיים הממלאים בכתב יד משני הצדדים.

יש לענות על 4 שאלות בלבד ולציין את מספרי השאלות במחברת.

כל שאלה שווה ל-25 נקודות. יש אפשרות לבונוס של 7 נקודות בשאלה 1.

1.

א. (18 נק') להוכיח שהפתרון של בעיית קושי $\sin x - 2 \sin x = 0$ $y(0) = -1$ $y' \cos x + y \sin x + \sin|y|^{1/2} \sin x - 2 \sin x = 0$ מקיים את האי-שוויון $1 - 2 \cos x < y < 3 - 4 \cos x$ כאשר $0 < x < \pi/2$. רמז: להשוות עם משוואות נוחות יותר. בונוס (7 נק'): מה קורה כאשר $-\pi/2 < x < 0$? לנמק.

ב. (7 נק') איזה בעיות שפה צמודות לעצמן? לנמק.

$$\left\{ \begin{array}{l} (u' \sin x)' + u = 0 \\ u(0) = 0, u'(1) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u'' + u' + u = 0 \\ u(0) = 0, u'(1) + u(1) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (u' \cos x)' + u \sin x = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{array} \right.$$

2.

א. (15 נק') למיין נקודות סינגולריות (כולל ∞) לרגולריות ולא רגולריות של המשוואה

$$(x^2 - 3x + 2) \sin \pi x y'' + \frac{5}{2} \pi (x-1) y' - \pi y = 0$$

ב. (10 נק') איזה מן התנאים הבאים אפשר לקיים? לנמק. $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{-1/2} y(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1) y(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2 y(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{-1/3} y(x) = 1$$

3.

א. (15 נק') למצוא את הערך של $\alpha \in \mathbf{R}$ שעבורו יש פתרון פורמלי בצורת טור לפי הפונקציות העצמיות של בעיית

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + u = x - \pi/2 + \alpha \cos x \\ u'(0) = 0, u(\pi/2) = 0 \end{array} \right. \quad \text{שטורם - ליאוביל המתאימה לבעיית השפה}$$

ב. (10 נק') מה המספר של פתרונות? למצוא את כל הפתרונות.

4.

א. (13 נק') למצוא את הנקודות הקריטיות של המערכת $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x+y) \end{array} \right.$ ולבדוק את יציבותן.

ב. (12 נק') לצייר את הדיוקנים הפזיים של המערכות $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -3x + y - 2 \\ \dot{y} = -5x + y \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - 2y + 2 \end{array} \right.$ למיין את

הנקודות הקריטיות.

5. למצוא את התחום שכל הקווים הפזיים נכנסים אליו כדי להישאר בו לתמיד

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x - 3y + \xi(t) \\ \dot{y} = 2x - 4y \end{array} \right. , \quad |\xi(t)| \leq 0.1$$

בהצלחה!