

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
תרגילים במשוואות דיפרנציאליות רגילות 2

המורה: פרופ' א. לבנט

1. להוכיח שהפתרון של בעיית קושי $y' \cos x + y \sin x + \sin|y|^{1/2} \sin x - 2 \sin x = 0$ קושי $y(0) = -1$ מקיים את האי-שוויון $1 - 2 \cos x < y < 3 - 4 \cos x$ כאשר $0 < x < \pi/2$. רמז: להשוות עם משוואות נוחות יותר. מה קורה כאשר $-\pi/2 < x < 0$? לנמק.

2. למצוא את הפתרון הכללי של מערכת המשוואות כאשר ידוע פתרון אחד:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + e^{-t} - te^{-t})x + (te^{-t} - e^{-t})y \\ \dot{y} = (e^{-t} - te^{-t})x + (1 + te^{-t} - e^{-t})y \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \text{ הפתרון הפרטי}$$

3. למצוא את הפתרון הכללי של מערכת המשוואות עם פתרון אחד ידוע

$$\begin{cases} \dot{x} = (\frac{2}{t} + 1)x - (2e^{-t} + 2te^{-t})y \\ \dot{y} = (\frac{1}{t}e^t + \frac{1}{t^2}e^t)x - (\frac{2}{t} + 1)y \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} \text{ הפתרון הפרטי}$$

4. למצוא פתרון כללי למשוואה $(t^2 - 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = 6t$ אם ידועים שני פתרונות $x_1 = t, x_2 = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$.

5.

א. האם יש פתרונות יציבים למשוואה $\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x \sin t - x \cos 5t = 0$? לנמק.

ב. לבדוק את היציבות האסימפטוטית של הפתרון לבעיית קושי

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, \ddot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x} - (t^2 + 1)^{-1}\dot{x} + \dot{x} + tx = e^t$$

6. להוכיח שלכל פתרון של המשוואה $\ddot{x} + (3t + 8)/(t + 1) \cdot x = 0$ יש לא יותר מ-2 אפסים בקטע [20,23].

7. להוכיח שלכל פתרון של המשוואה $\ddot{x} + 2(t + 1/t)x = 0$ יש לפחות נקודת קיצון אחת בקטע [3,7].

8.

א. מצא את המקדמים c_0, \dots, c_4 של פיתוח טיילור $x = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + o(t^4)$ בסביבה של $t = 0$ לפתרון בעיית קושי

$$\ddot{x} - t\dot{x} \cos t = \sin t, \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

ב. הערך את השארית $R(t) = x - c_0 - c_1t - c_2t^2 - c_3t^3$ דרך מציאת הקבועים $\varepsilon > 0, M > 0$ שעבורם בסביבה $|t| \leq \varepsilon$ מתקיימת ההערכה $|R(t)| \leq Mt^4$.

9.

א. מצא את המקדמים c_0, \dots, c_4 של פיתוח טיילור $x = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + o(t^4)$ בסביבה של $t = 0$ לפתרון בעיית קושי

$$e^t \ddot{x} - t\dot{x} + x = \ln(1 + t), \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

ב. להעריך את השארית $R(t) = x - c_0 - c_1t - c_2t^2$ דרך מציאת הקבועים $\varepsilon > 0, 0 < M$ שעבורם בסביבה $|t| \leq \varepsilon$ מתקיימת ההערכה $|R(t)| \leq M|t|^3$. ידוע ש- $e \approx 2.7$.

10. איזה בעיות שפה צמודות לעצמן? לנמק.

$$\left\{ \begin{array}{l} (u' \sin x)' + u' \cos x = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} u'' + u' + u = 0 \\ u(0) = 0, u(1) + u(1) = 0 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} (u' \cos x)' + u \sin x = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{array} \right.$$

11. למיין נקודות סינגולריות (כולל ∞) לרגולריות ולא רגולריות של המשוואה

$$(x^2 - 3x + 2) \sin \pi x y'' + \frac{5}{2} \pi(x-1)y' - \pi y = 0$$

12. למצוא את הנקודות הסינגולריות ולמיין אותן לרגולריות ולא רגולריות למשוואה

$$(t^2 - 1) \sin \pi t \cdot \ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$$

13. איזה מן התנאים הבאים אפשר לקיים בבעיה 11? לנמק. $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{-1/2} y(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)y(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2 y(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^{-1/3} y(x) = 1$$

14. לחשב את הגבולות $\lim_{t \rightarrow 1-0} x$, $\lim_{t \rightarrow 1-0} |t-1|^{-1/8} x$, $\lim_{t \rightarrow 1-0} (t-1)^{1/3} x$ (גם אי-קיום הגבול היא תשובה אפשרית) כאשר $x(t)$ הוא כל אחד מן הפתרונות של המשוואות

$$\frac{1}{\pi} 8(1 - \cos 2\pi t) \ddot{x} - 2 \sin \pi t \cdot \dot{x} + \pi x = 0$$

$$t \in (-1, 1); \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0; \quad (t-1)^2 \ddot{x} + (t-1)\dot{x} + x = 0$$

15. למצוא את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + u + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(1) + 3u'(1) = 0 \end{array} \right.$$

16. למצוא את הערכים העצמיים (אפשר בצורה גרפית) ואת הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + u + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0, u(\pi/2) + u'(\pi/2) = 0 \end{array} \right.$$

17. מצא את פונקציית גרין ופתור את בעיית ערך השפה

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + u = 1 \\ u(0) = 0, u(\pi/2) + u'(\pi/2) = 0 \end{array} \right.$$

18.

א. למצוא את הערך של $\alpha \in \mathbf{R}$ שעבורו יש פתרון בצורת טור לפי הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + u = 1 + \alpha \sin x \\ u(0) = 0, u(\pi) = 0 \end{array} \right. \quad \text{המתאימה לבעיית השפה, כך שהוא מקיים את המשוואה ב-} (\pi, 0)$$

ב. מה המספר של פתרונות? למצוא את כל הפתרונות.

19.

א. למצוא את הערך של $\alpha \in \mathbf{R}$ שעבורו יש פתרון לבעיית השפה $\left\{ \begin{array}{l} u'' + u = \sin x + \alpha \cos x \\ u'(0) = 0, u'(\pi) = 0 \end{array} \right.$ בצורת הטור לפי

הפונקציות העצמיות של בעיית שטורם – ליאוביל המתאימה. מה המספר של פתרונות? למצוא את כל הפתרונות.

20. למצוא את הנקודות הקריטיות של המערכת ולבדוק את יציבותן.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x - x^2 \\ \dot{y} = 3x - y - x^2 \end{cases}$$

21. למצוא את הנקודות הקריטיות של המערכת ולבדוק את יציבותן.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 3x^2 + 4y^2 \\ \dot{y} = x + 2y + 3x^2 - 4y^2 \end{cases}$$

22. מצא את הפתרונות הקבועים של המשוואה $\ddot{x} + \sin(x\dot{x}) + x^2 - 1 = 0$ ובדוק את יציבותם.

23. לצייר את הדיוקנים הפזיים של המערכות, למיין את הנקודות הקריטיות.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 7y \\ \dot{y} = 2x - 6y \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = -5x + 3y \\ \dot{y} = -9x + 7y \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = 4x - y + 1 \\ \dot{y} = 9x - 2y \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - 2 \\ \dot{y} = -5x + y \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - 2y + 2 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y + 5 \\ \dot{y} = 2x - 5y + 3 \end{cases}, \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = 4x - 5y \end{cases}$$

24. למצוא תחום קומפקטי כזה שכל הקווים הפזיים נכנסים אליו כדי להישאר בו לתמיד

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + 0.01 \cos(t^3 + xy) \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$$

*25. למצוא תחום קומפקטי כזה שכל הקווים הפזיים נכנסים אליו כדי להישאר בו לתמיד

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 0.01 \cos(t^2 + x^2 y + 1) \\ \dot{y} = -5x - 4y \end{cases}$$

26. למצוא תחום קומפקטי כזה שכל הקווים הפזיים המתחילים בו שואפים אסימפטוטית ל-0 בלי לצאת מהתחום

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases}$$

*27. למצוא תחום קומפקטי כזה שכל הקווים הפזיים המתחילים בו שואפים אסימפטוטית ל-0 בלי לצאת מהתחום

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 5y \\ \dot{y} = -x + y + y^4 \end{cases}$$

*28. למצוא תחום קומפקטי אנווריאנטי כזה שכל הקווים הפזיים נכנסים אליו כדי להישאר בו לתמיד

$$\begin{cases} \dot{x} = -7x - 2y + 0.01 \cos(t^3 + xy) \\ \dot{y} = 8x + y \end{cases}$$

29. מה הוא נפח התחום שאליו עוברת הקובייה $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$ כעבור 3 יחידות זמן כתוצאה מהתנועה מתוארת על-ידי מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2xy / (1 + y^2 + z^2) + 5y \\ \dot{y} = 2y - z^3 - \ln(1 + y^2 + z^2) \\ \dot{z} = -x^7 + y + 3z \end{cases}$$

30. מה הם הערכים של $\alpha \in \mathbf{R}$ שבשבילם הנקודה הקריטית בראשית יציבה לפי הקירוב הראשון?

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(\alpha x - 3y) + x \cos y \\ \dot{y} = \alpha e^{\alpha x - 2y} + \ln(1 + \alpha x) + 2x - \alpha \end{cases}$$

31. מה הם הערכים של $\alpha \in \mathbf{R}$ שבשבילם יש פתרון קבוע יציב לפי הקירוב הראשון. מה הוא הפתרון?

$$\ddot{x} + (\alpha^2 + 1)^2 \cos(\alpha \ddot{x} + \dot{x}) + 3\alpha \sin \dot{x} - \ln(1 - 2\alpha \ddot{x}) - x^2 = 0$$

32. לבדוק את יציבות פתרונות המשוואות

$$; \ddot{x} + \ddot{x} + 2\dot{x} + x = t^4 ; \ddot{x} + \sqrt{7}\dot{x} - \pi x = 0 ; x^{(6)} - x = \cos(\arctan t)$$

$$; \ddot{x} + 2\ddot{x} + \dot{x} + 3x = -t ; \ddot{x} + \sqrt{3}\dot{x} + x = 0$$

$$. x(0) = 0, \dot{x} = -|x|x^5 ; \dot{x} = |x| \tan(-x^3 + x^4) ; \dot{x} = -x^2 ; \dot{x} = -x^3$$