

תרגיל מספר 7 פתרונות

תשובה 1

א. להוכיח שכל הפתרונות של המשוואה $\dot{y} = ty e^{-y^2} + y$ מוארכים לכל ציר t .

המשוואה שקולה ל $y(t) = y(0) + \int_0^t (se^{-y(s)^2} + 1)y(s)ds$. ניקח T חיובי שרירותי ונניח ש $|t| \leq T$. אז

$$|y(t)| \leq |y(0)| + \int_0^t (|s| + 1)|y(s)| ds \quad \text{לכן} \quad |y(t)| \leq |y(0)| + \int_0^t (T + 1)|y(s)| ds \quad \text{כאשר } t \geq 0$$

$$\text{ו-} \int_0^{|t|} (T + 1)|y(-s)| ds \quad \text{כאשר } t \leq 0. \text{ מלמה של Gronwall-Bellman בשני המקרים}$$

$|y(t)| \leq |y(0)| e^{(T+1)|t|} + 1 = M(T)$, לפי המשפט על הארכת פתרונות אפשר להאריך את הקו $(t, y(t))$ עד לשפת התחום $\{|t| \leq T, |y(t)| \leq M(T)\}$. אבל זה אפשרי רק דרך השפה $t = \pm T$.

ב. להוכיח שאף פתרון לא אפסי של המשוואה $\dot{y} = |t| y^3$ לא מוארך לכל ציר t .

$y = 0$ כמובן מוארך לכל ציר t . כאשר $y \neq 0$ מקבלים $\frac{\dot{y}(t)}{y(t)^3} = |t|$. נבצע אינטגרציה מ- t_0 עד ל- t :

$$y(t)^2 = \left(\frac{1}{y(t_0)^2} - t^2 \operatorname{sign} t \right)^{-1} \quad \text{לכן} \quad -\frac{1}{2y(t)^2} = \frac{1}{2} t^2 \operatorname{sign} t - \frac{1}{2y(t_0)^2}$$

הפתרון מגיע ל- ∞ ולא יכול להיות מאורך לכל הקטע.

תשובה 2

א. $Y(t)$ פתרון בסיסי. לכן עמודותיה בתיל, ולכן חזרוניסקיאן $W = \det Y(t)$ לשינוי אולי
נכתובים בו היא פתרון בסיסי שהוא כל חיבור. למעשה, צריך גם להניח שמקדמי המערכת רציפים
ניתן גם להסיק זאת מכך שנתון פתרון יסודי, אחרת לא מובטח בכלל שקיים מרחב ליטארי של
פתרונות. מכאן שהמטריצה $Y(t)$ הפיכה לכל t .

לגבי המטריצה $Y'(t)$: ידוע מאלגוריתם ליטארי שמתמיד מתקיים $\det Y'(t) = \det Y(t)$, ולכן גם
הדטרמיננטה של $Y'(t)$ תמיד שונה מאפס, ולכן $Y'(t)$ תמיד הפיכה.

ב. $Y(t)$ מטריצה בסיסית של המערכת. לכן מתקיים $\frac{d}{dt}(Y(t)) = A(t) \cdot Y(t)$ נמצא שזאת נכונה
נכון. מחלקי ונקבל:

$$\left[\frac{d}{dt}(Y(t)) \right]^T = \frac{d}{dt}(Y'(t)) = Y'(t) \cdot A'(t)$$

(זכור, שחלקי חופף את סדר הסכמי $(AB)^T = B^T A^T$.)

$$מ- Y Y^{-1} = I \text{ מקבלים } \dot{Y} Y^{-1} + Y (Y^{-1})' = 0 \text{ לכן } (Y^{-1})' = -Y^{-1} \dot{Y} Y^{-1}.$$

ולכן אותה תוצאה נכונה גם עבור המטריצה המשוואת:

$$\frac{d}{dt}[(Y'(t))^{-1}] = -(Y'(t))^{-1} \cdot \frac{d}{dt}(Y'(t)) \cdot (Y'(t))^{-1}$$

נציב את השידוך $\frac{d}{dt}(Y'(t)) = Y'(t) \cdot A'(t)$, ונקבל:

$$\frac{d}{dt}[(Y'(t))^{-1}] = -(Y'(t))^{-1} \cdot [Y'(t) \cdot A'(t)] \cdot (Y'(t))^{-1}$$

אך מכיוון ש- $(Y'(t))^{-1} \cdot Y'(t) = Id$, שני הנורמים השמאליים מצטמצמים, ונקבל:

$$\frac{d}{dt}[(Y'(t))^{-1}] = -A'(t) \cdot (Y'(t))^{-1}$$

ולכן, המטריצה $(Y'(t))^{-1}$ מקיימת את חמוצי $\dot{\bar{y}}' = -A'(t) \cdot \bar{y}$. תבדוקן שהיא מטריצה הפיכה,
המטריצה הבסיסית לבי חזרוניסקיאן שונה מאפס. שעמודותיה פתרונות בתיל של המערכת.

תשובה 3

$$א) \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ב) \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בנוסחה שהייתה בהרצאה.

$$ג) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \lambda = 4: \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, E^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A = E \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E^{-1}$$

$$\exp(At) = E \exp \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t \right] E^{-1} = E \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} E^{-1}$$

(7) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ נמצא וקטורים עצמי ווקטור עצמי מוכלל

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \lambda = 3: \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A = E \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} E^{-1}$$

$$\exp(At) = E \exp \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} t \right] E^{-1} = E \exp \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} t \right] \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right] E^{-1} = E e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E^{-1}$$

$$\cdot \exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 2te^{3t} \\ 0 & 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 2te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

תשובה 4

$$\cdot W(Y^1, Y^2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & e^t \\ 2t & e^t \end{vmatrix} = te^t(t-2) \quad \text{א.}$$

ב. הווקטורים בלתי תלויים ליניארית בכל קטע שבו $W(Y^1, Y^2)(t)$ לא מתאפס, זאת אומרת בכל קטע שהוא לא מכיל 0 ו-2.