

תרגיל מספר 6 פתרונות

תשובה 1

$$\begin{cases} y'_x(x, \varepsilon) = \sin x \sin y(x, \varepsilon) + \sin 2x \sin(2y(x, \varepsilon)) \\ y(0, \varepsilon) = \varepsilon \end{cases}$$

$$y = y(x, \varepsilon) = y(x, 0) + y'_\varepsilon(x, 0)\varepsilon + o(\varepsilon)$$

1. כאשר $\varepsilon = 0$ מקבלים $y' = \sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y$, $y(0) = 0$ לכן $y(x, 0) = 0$

2. נסמן $z = y'_\varepsilon(x, 0)$. גוזרים לפי ε , מציבים $\varepsilon = 0$ ומקבלים

$$\begin{cases} z' = \sin x (\cos 0)z + \sin 2x (2 \cos(2 \cdot 0))z \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

לכן $z = e^{2 - (\cos x + \cos 2x)}$, $y = y(x, \varepsilon) = 0 + \varepsilon e^{2 - \cos x - \cos 2x} + o(\varepsilon)$

$$\begin{cases} z' = z(\sin x + 2 \sin 2x) \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

תשובה 2.

נרשום את המשוואה בצורה $\begin{cases} y'_t(t, \varepsilon) = \sin(y(t, \varepsilon) - 1 + \varepsilon) + \sin \varepsilon \\ y(0, \varepsilon) = 1 + \varepsilon \end{cases}$. מכוון שהצד הימין חלק ב t, ε גם y היא פונקציה חלקה של t, ε . לכן $y = y(x, \varepsilon) = y(x, 0) + y'_\varepsilon(x, 0)\varepsilon + R(t, \varepsilon)$. מכאן $R(t, \varepsilon) = \frac{1}{2} y''_{\varepsilon\varepsilon}(t, \theta\varepsilon)$, $\theta \in (0, 1)$. מכאן ש- $y''_{\varepsilon\varepsilon}$ חסומה בכל תחום קומפקטי מקבילי ש $R(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ ולכן גם $R(t, \varepsilon) = o(\varepsilon)$ בתחום $\{(t, \varepsilon) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in [-T, T], \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\}$ עם $T, \varepsilon_0 > 0$ כלשהם. מכוון ש ממילה ε קרוב ל0 מקבלים

אנו צריכים למצוא $y(t, 0)$ ו $z(t) = y'_\varepsilon(t, 0)$.

1. נציב $\varepsilon = 0$. נקבל $\begin{cases} \dot{y} = \sin(y - 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ כאשר $y = y(t, 0)$. מכאן $y(t, 0) = 1$ (פונקציה קבועה).

2. נגזור את המערכת ב- ε ,

$$\begin{cases} y''_{t\varepsilon}(t, \varepsilon) = \cos(y(t, \varepsilon) - 1 + \varepsilon) + \cos(y(t, \varepsilon) - 1 + \varepsilon)y'_\varepsilon(t, \varepsilon) + \cos \varepsilon \\ y'(0, \varepsilon) = 1 \end{cases}$$

ונציב $\varepsilon = 0$:

מכאן $\begin{cases} \dot{z} = z + 2 \\ z(0) = 1 \end{cases}$. $z = ce^t - 2$, לכן $z = 3e^t - 2$ והתשובה היא $y = 1 + (3e^t - 2)\varepsilon + o(\varepsilon)$ או גם נכון $y = 1 + (3e^t - 2)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

סימו לב ש $O(\varepsilon^2)$ הוא גם $o(\varepsilon)$, אבל לא ההפך!

תשובה לשאלה 3 לא נדרשת.

תשובה 4

. נרשום את הבעיה בצורה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(0) = 1 + \varepsilon \end{cases}$, לכן $y = y(x, \varepsilon)$ וצריך להעריך את ההפרש בין $y(x, \varepsilon) - y(x, 0)$ בקטע $[0, 1]$ כאשר $\varepsilon = 0.1$. מכאן

$$y(x, \varepsilon) - y(x, 0) = y'_\varepsilon(x, \xi)\varepsilon, \quad \xi = \xi(x, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$$

נסמן $z = y'_\varepsilon(x, \xi)$ (משפט לגרנג') . נקבל

$$\begin{cases} z' = z \cos y(x, \xi) \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

מכאן $z = 1 + \int_0^x z(s) \cos y(s, \xi) ds$, ולפי למה של Gronwall-Bellman מקבלים

$$|y(x, \varepsilon) - y(x, 0)| \leq \varepsilon e^x, \quad |y(x, 0.1) - y(x, 0)| \leq 0.1e^x \quad \text{ו-} \quad |y'_\varepsilon(x, \xi)| = |z(x)| \leq e^x$$

תשובה 5

נקודה קריטית $(0, 0)$. הליניאריזציה היא $z, z \in \mathbb{R}^2$ $\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)z$, $\begin{cases} \dot{y}_1 = (1 + y_1) \sin y_2 = f_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 = 1 - y_1 - \cos y_2 = f_2(y_1, y_2) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} \sin y_2 & (1 + y_1) \cos y_2 \\ -1 & \sin y_2 \end{bmatrix}$$

הליניאריזציה היא $\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1 \end{cases}$

תשובה 6

נסמן $\Psi(x) = \int_{x_0}^x (u(s)\varphi(s) + v(s))ds$, אז אי-השוויון שלנו הוא $\varphi(x) \leq A + \Psi(x)$. סימו לב ש-

ונקבל $\Psi'(x) = u(x)\varphi(x) + v(x)$. נכפיל ב- $u(x) > 0$

$$\frac{\Psi'(x)}{A + \Psi(x)} \leq u(x) + \frac{v(x)}{A + \Psi(x)} \leq u(x) + \frac{v(x)}{A}, \quad \Psi'(x) - v(x) \leq (A + \Psi(x))u(x)$$

$$\ln(A + \Psi(x)) - \ln A \leq \int_{x_0}^x \left(u(s) + \frac{v(s)}{A}\right)ds, \quad \int_{x_0}^x \frac{\Psi'(s)}{A + \Psi(s)} ds \leq \int_{x_0}^x \left(u(s) + \frac{v(s)}{A}\right)ds$$

$$\varphi(x) \leq A + \Psi(x) \leq A e^{\int_{x_0}^x \left(u(s) + \frac{v(s)}{A}\right)ds}$$