

## משוואות דיפרנציאליות רגילות

### פתרון תרגיל 5

#### תשובה 1

- א. למשוואה לינארית נתונה יש פתרון:  $y = \varphi(x) = (1 + e^{2x})/2$ .  
 $\varphi(0.1) = 1.111, \varphi(0.2) = 1.246, \varphi(0.3) = 1.411$
- ב.  $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$ ,  
 $\varphi(0.1) \quad 1.1, \varphi(0.2) \quad 1.22, \varphi(0.3) \quad 1.364$

#### תשובה 2

- א. קל לראות שלמשוואה לינארית נתונה יש פתרון:  $y(x) = (y_0 - x_0)e^{x-x_0} + x$ .
- ב.  $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) = y_{k-1} + h(1 - x_{k-1} + y_{k-1}) = y_{k-1}(1 + h) + h - hx_{k-1}$ .
- ג. סים לב כי  $y_1 = (1 + h)y_0 + h - hx_0 = (1 + h)(y_0 - x_0) + h + x_0 = (1 + h)(y_0 - x_0) + x_1$ .  
באותו אופן  
 $y_2 = (1 + h)y_1 + h - hx_1 = (1 + h)((1 + h)(y_0 - x_0) + x_1) + h - hx_1 = (1 + h)^2(y_0 - x_0) + x_2$ .  
בצורה דומה אפשר להראות באינדוקציה כי  $y_n = (1 + h)^n(y_0 - x_0) + x_n$ .  
נקבע  $x$  ו  $h = (x - x_0)/n$ . אז נקבל  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (x - x_0)/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (1 + (x - x_0)/n)^{n/(x-x_0)} \right]^{x-x_0} = e^{x-x_0}$ .

#### תשובה 3

- א. קל לראות כי  $y(x) = -1$  פותר את המשוואה. מכיון ש  $\sin(x^2)$ ,  $\arctan(x)$  הן פונקציות רציפות, הפתרון הוא יחיד.

#### תשובה 4

- ברור ש  $y_1(0) = y_2(0) = 0$  לכן מקבלים סתירה למשפט קיום ויחידות כאשר  $n = 1$ .  
נחשב  
 $y_1'(0) = y_2'(0) = 1, y_1''(0) = y_2''(0) = 0, y_1'''(0) = y_2'''(0) = 0, y_1^{(4)}(0) = 0 \neq y_2^{(4)}(0) = 24$   
לכן נקבל סתירה למשפט קיום ויחידות גם כאשר  $n = 2, 3, 4$ , אבל אין שום סתירה כאשר  $n \geq 5$ .  
למשל  $y_1, y_2$  מקיימות את המשוואה  $y^{(n)} = 0, n \geq 5$ .

## תשובה 5

א. נתבונן ב  $x \in \mathbf{R}$  כלשהו.

אם  $h(x) \geq 0$  אז  $|h(x)| = h(x)$  ומתקיים

הרחב ומתקיים  $f(x) \geq g(x)$ . ומכאן נסיק כי  $h(x)$  יורדת.

אם  $h(x) \leq 0$  אז  $|h(x)| = -h(x)$  ומתקיים

הרחב ומתקיים  $f(x) \leq g(x)$ . ומכאן נסיק כי  $h(x)$  עולה וכי  $-h(x)$  יורדת.

בשני המקרים  $|h(x)|$  יורדת ולכן לכל  $a < b$  מתקיים  $|h(b)| \leq |h(a)|$ .

ב. יהי  $x \geq a$ , לפי חלק א':  $|h(x)| \leq |h(a)|$  אך במקרה זה  $h(a) = f(a) - g(a) = 0$  ולכן

$|h(x)| \leq 0$  ומתקיים  $h(x) \equiv 0$  או  $f \equiv g$  כנדרש.