

משך הבחינה: 3 שעות

חומר מותר לשימוש: דף A4 אחד אישי הממלא בכתב יד משני הצדדים.

יש לענות על 4 שאלות בלבד ולציין את מספרי השאלות במחברת. שימוש במחשבון מותר אבל מיותר. כל שאלה שווה ל-25 נקודות. אם לא נאמר אחרת צריך לחפש פתרונות ממשיים.

1.

א. (15 נק') מצא את הפתרון הכללי של $\dot{y} + \tan(x)y = \sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ופתרון לבעיית קושי עם $y(0) = 1$.ב. (10 נק') מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $\left(\frac{2x}{x^2 + y^2} - \sin x - y^3\right)dx + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} - 3xy^2\right)dy = 0$.2. מצא פתרון בעיית קושי $\ddot{y} + 2\dot{y} \cos \varepsilon + y - (e^t y + te^{-t} + \dot{y}) \sin \varepsilon = 0$, $\dot{y}(0) = (1 + \varepsilon)^2$, $y(0) = \tan \varepsilon$.בקירוב לינארי לגבי $\varepsilon \approx 0$ כאשר t משתנה בקטע סגור כלשהו סביב 0.

3. מצא פתרון כללי למערכת משוואות (חפש דרך כלה!)

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.

א. (18 נק') בצע את הלינאריזציה בנקודה הקריטית $y_1 = 1, y_2 = 1$ וצייר את הדיוקן הפזי של המערכת

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 y_2 + y_1 - 2 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 + 3y_2 - 3 \end{cases}$$

הליניארית ההומוגנית המתקבלת

ב. (7 נק') מה התבנית שבה מחפשים פתרון פרטי במקרה הבא (נוסחה בלבד)? $\dot{y} = Ay + B(t)$, $y \in R^4$

$$B = \begin{pmatrix} t^2 + e^{2t} \sin t \\ t^2 e^{3t} + e^t \cos t \\ te^{3t} \\ t \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים של A הם $\lambda_{1,2,3,4} = 0, 0, 1+i, 1-i$

5. פתור בעיית קושי $t^2 \ddot{y} - 2y = t^2$, $t > 0$, $\dot{y}(1) = 0$, $y(1) = 1$.

בהצלחה!

פתרונות

$$|t| < \frac{\pi}{2}, y(0) = 1, \dot{y} + \tan t \cdot y = \sin t, k=1$$

$$y = y_h + y_p \quad \text{homogeneous}$$

$$\dot{y}_h + \tan t \cdot y_h = 0$$

$$y_h = 0 \quad \text{homogeneous}$$

$$\frac{\dot{y}_h}{y_h} = -\tan t$$

$$\ln |y_h(t)| = \int -\frac{\sin t}{\cos t} dt = \int \frac{d(\cos t)}{\cos t} = \ln |\cos t| + C_1 = \ln \cos t + C_1$$

$$y_h(t) = C_2 \cos t, \quad C_2 = \pm e^{C_1}, 0 \leftarrow$$

$$y_p = C(t) \cos t \quad \text{method of variation of constants}$$

$$\dot{C} \cos t = \sin t$$

$$C = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\ln \cos t + C_0, \quad \cos t > 0$$

$$y = C \cos t - \ln(\cos t) \cdot \cos t$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\left(\frac{dx}{x^2+y^2} - \sin x - y^3 \right) dx + \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - 3y^2 x \right) dy = 0, k=1$$

$$\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + d \cos x - d x y^3 = 0$$

$$\ln(x^2+y^2) + \cos x - x y^3 = C \quad \text{homogeneous}$$

$$\ddot{y} + 2 \cos \varepsilon \dot{y} + y - (e^t y + t e^{-t} + \dot{y}) \sin \varepsilon = 0 \quad .2$$

$$y(0) = t g \varepsilon, \quad \dot{y}(0) = (1 + \varepsilon)^2$$

$$y = \Phi(t, \varepsilon) = \Phi(t, 0) + \Phi'_\varepsilon(t, 0) \varepsilon + \underbrace{\frac{1}{2} \Phi''_{\varepsilon\varepsilon}(t, 0) \varepsilon^2}_{O(\varepsilon^2)} \quad \theta \in [0, 1]$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1 \end{cases} \quad \varepsilon = 0, k$$

$$y = t e^{-t} = \Phi(t, 0)$$

$$y = \Phi(t, 0) = t e^{-t}, \quad z = \Phi_\varepsilon(t, 0) \quad (1^{st}), \quad \varepsilon \text{ 's } \partial \text{ of } \Phi(t, \varepsilon) \text{ w.r.t. } \varepsilon$$

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + 0 \cdot \dot{y} + z = e^t t e^{-t} + t e^{-t} + e^{-t} + t e^{-t}$$

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + z = t + e^{-t}$$

$$z = z_h + z_p, \quad z_p = a + b t + c t^2 e^{-t}$$

$$\dot{z}_p = b + c(2t e^{-t} - t^2 e^{-t})$$

$$\ddot{z}_p = c(2e^{-t} - 4t e^{-t} + t^2 e^{-t})$$

$$\begin{array}{l|l} 2b + a + b t = t & c(2e^{-t} - 4t e^{-t} + t^2 e^{-t} + 4t e^{-t} - 2t^2 e^{-t} + t^2 e^{-t}) = e^{-t} \\ b = 1, a = -2b = -2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 1^{st} \text{ part} \\ 2^{nd} \text{ part} \end{array}$$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$z = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} - 2 + t + \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

$$\dot{z} = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} + 1 + t e^{-t} - \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

$$z(0) = 1 \quad \dot{z}(0) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 - 2 = 1 \\ -c_1 + c_2 + 1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 + 1 = 2 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 4 \end{cases}$$

$$z = 3e^{-t} + 4t e^{-t} - 2 + t + \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

$$y = t e^{-t} + (3e^{-t} + 4t e^{-t} - 2 + t + \frac{1}{2} t^2 e^{-t}) \varepsilon + o(\varepsilon)$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 3$$

$$y_2 = \dot{y}_1 \quad y_1, y_2 \text{ d. A. k. l. e. n}$$

$$\ddot{y}_1 - 5\dot{y}_1 + 6y_1 = t, \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$y_{1p} = c_1 + c_2 t$$

$$-5c_2 + 6c_1 + 6c_2 t = t$$

$$c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{5}{6} c_2 = \frac{5}{36}$$

$$\dot{y}_1 = \begin{cases} y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} t \\ y_2 = 2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t} + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$y_3, y_4 \text{ d. A. k. l. e. n}$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_h + \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_p,$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \text{ d. A. k. l. e. n}$$

$$\begin{cases} -3d_1 + d_2 = 1 \\ -5d_1 + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d_1 = 1 \\ d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2, \quad \lambda = -1 \pm i$$

$$\lambda = -1-i \quad \begin{pmatrix} -2+i & 1 \\ -5 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1 = e_1 e^{(-1-i)t}, \quad \varphi_2 = \bar{e}_1 e^{(-1+i)t} \quad \text{d. A. k. l. e. n d. A. k. l. e. n}$$

$$\operatorname{Re} \varphi_1, \operatorname{Im} \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t) = \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t - \sin t \end{pmatrix} + i e^{-t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ -2\sin t - \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t - \sin t \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + 2\sin t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 + y_1 - 2 \\ \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 3y_2 - 3 \end{pmatrix} = f(y) \quad \text{... 3 סימנים, 8.4, 4}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) z$$

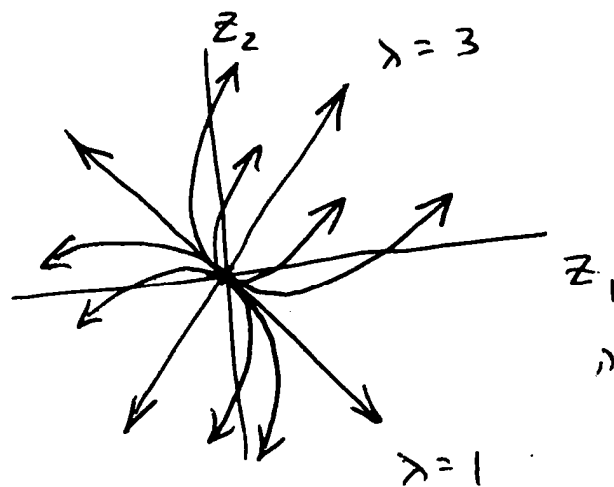
$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} y_2 + 1 & y_1 \\ y_1 & -y_2 + 3 \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$$

... 3' מס' 7CP

$$\lambda=1 \quad y_1 = -y_2 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda=3 \quad y_1 = y_2 \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



הפעם (0,0) נקראת נקודת שיווי המשקל

$$\dot{y} = Ay + B(t), \quad y \in \mathbb{R}^4, \quad \lambda_{1,2,3,4} = 0, 1 \pm i$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} t^2 + e^{2t} \sin t \\ t^2 e^{3t} + e^t \cos t \\ t e^{3t} \\ t \end{pmatrix}$$

$\lambda=0$ (0,1,5,7) $\lambda=1+i$ (0,1,5,7) $\lambda=2+i$ (0,1,5,7) $\lambda=3$ (0,1,5,7)

$$y_p = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + e^{2t} \cos t + (e^{2t} \sin t) + e^{3t} (c_8 + c_9 t + c_{10} t^2) + e^t \cos t (c_{11} + c_{12} t) + e^t \sin t (c_{13} + c_{14} t)$$

$c_i \in \mathbb{R}^4$

$$t^2 \ddot{y} - 2y = t^2, \quad y(1)=1, \quad \dot{y}(1)=0, \quad t>0 \quad .5$$

(Euler method, substitution) $t = e^\tau, \tau = \ln t$!!!!!

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = y' \frac{1}{t}$$

$$\ddot{y} = \left(y' \frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2} y' + \frac{1}{t^2} y'', \quad t^2 = e^{2\tau}$$

$$y'' - y' - 2y = e^{2\tau}, \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) \text{ roots}$$

$$y_p = C \tau e^{2\tau} \quad \text{particular solution}$$

$$y_p' = C(e^{2\tau} + 2\tau e^{2\tau})$$

$$y_p'' = C(4e^{2\tau} + 4\tau e^{2\tau})$$

$$C[4e^{2\tau} + 4\tau e^{2\tau} - e^{2\tau} - 2\tau e^{2\tau} - 2\tau e^{2\tau}] = e^{2\tau}$$

$$C = \frac{1}{3}$$

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-\tau} + C_2 e^{2\tau} + \frac{1}{3} \tau e^{2\tau} = C_1 \frac{1}{t} + C_2 t^2 + \frac{1}{3} t^2 \ln t$$

$$\dot{y} = -C_1 \frac{1}{t^2} + 2C_2 t + \frac{2}{3} t \ln t + \frac{1}{3} t$$

$t=1$ initial conditions

$$\begin{aligned} y(1) = C_1 + C_2 &= 1 \\ \dot{y}(1) = -C_1 + 2C_2 + \frac{1}{3} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3C_2 &= \frac{2}{3}, \quad C_2 = \frac{2}{9} \\ C_1 &= 1 - C_2 = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$y = \frac{7}{9} \frac{1}{t} + \frac{2}{9} t^2 + \frac{1}{3} t^2 \ln t$$