

1. פתור את המשוואות

א. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$

ב. $y' + 2x = \cos(y - x + x^2)$

ג. למצוא את הפתרון החסום כאשר $t \rightarrow \pi/2$ של המשוואה $\dot{x} \sin 2t = 2(x + \cos t)$, $0 < t < \pi/2$.

2. פתור את המשוואה $xy' = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$

3. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y' - x^2 y = x^2 / y^2$

4. מצא בצורה $F(x, y, C) = 0$ את משוואת המסלולים בקואורדינטות x, y המקיימים $\begin{cases} \dot{y} = \frac{t^2 + 1}{(y^2 + 1)x} \\ \dot{x} = \frac{y(t^2 + 1)}{(y^2 + 1)^{3/2}} \end{cases}$

5. מצא פתרון כללי

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 - 3y_2 \\ y'_2 = y_1 - 2y_2 + 2 \sin x \end{cases}$$

6. מצא פתרון כללי $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$

7. באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי בשיטת המקדמים הבלתי ידועים למערכת המשוואות (רק נוסחה)

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2 - y_3 + 1 + e^x \\ y'_2 = y_1 + y_2 + x e^x \sin 2x \\ y'_3 = 3y_1 + y_3 + 3 \cos 2x \end{cases}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$$

ערכים עצמיים -

8.

א. מצא פתרון כללי $x^{(4)} + \ddot{x} = e^t + t$

ב. באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואה ווקטורית $\dot{x} = Ax + F(t)$, כאשר הערכים העצמיים של

המטריצה A ו- $F(t)$ הם $\lambda_{1,2,3,4} = 2, 2, i, -i$; $F = \begin{pmatrix} t + t e^t \cos t \\ t \cos t \\ t^2 e^{2t} \\ 2 \end{pmatrix}$ (שיטת מקדמים בלתי-ידועים)

9. באיזו צורה מחפשים פתרון פרטי למשוואה $P(\frac{d}{dt})x = 1 + 2t - e^t - \cos t + t \sin 2t$ אם ידוע ש-

$P(s) = s(s^2 - 1)^3(s^2 + 1)^2$, כאשר Q, P - פולינומים ולכל השורשים של Q החלק הממשי גדול מ-5 (שיטת מקדמים בלתי-ידועים, לתת נוסחה בלבד).

10.

א. מצא פתרון כללי $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = y + 1 + e^t \end{cases}$

ב. לחשב את האקספוננטה e^{At} של מטריצת המערכת A מסעיף א.

11. לבצע לינאריזציה בנק' $(\pi/2, 0)$ ולמצוא פתרון כללי של מערכת המשוואות המתקבלת

$$\begin{cases} \dot{x} = -\cos(x + \sin y) \\ \dot{y} = \operatorname{tg} 3y + 2 \cos x \end{cases}$$

12. לבצע לינאריזציה סביב הפתרון $x = \pi/2$ ולמצוא את הפתרון הכללי של המשוואה המתקבלת. רמז: אפשר לעבור למערכת משוואות מסדר ראשון.

$$\ddot{x} + \sin(2x + \cos(2\dot{x} + x)) + 1 - \sin(x + 3\dot{x}) = 0$$

13.

א. מהו הזוג של פונקציות $(1, \operatorname{tg} t)$ או $(t, \operatorname{tg} t)$ שיכול לקיים זוג פתרונות למשוואה $\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0$ עם מקדמים רציפים ב- $(-\pi/2, \pi/2)$. למצוא את $a_1(t), a_2(t)$ (לנמק).

ב. לפתור את בעיית קושי $\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = \frac{1}{\cos^3 t}$, $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1$.

14. פתור בעיית קושי

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = xe^x, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1, x > 0$$

15.

א. מהו הזוג של פונקציות וקטוריות $\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}$ שיכול לקיים זוג פתרונות למשוואה

$x \in \mathbf{R}^2, \dot{x} = A(t)x$ עם מטריצה $A(t)$ רציפה ב- $[0, 1]$ (לנמק). איך לחשב $A(t)$ (רמז: בנה משוואה דיפרנציאלית עבור המטריצה היסודית)?

ב. על סמך סעיף א לפתור את בעיית קושי $\dot{x} = A(t)x + \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$, $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$.

16. למצוא פתרון כללי למשוואה הבאה (רמז: פתרון פרטי של הבעיה ההומוגנית - פולינום):

$$(t^2 - 1)\ddot{x} - 6x = 1$$

17. למצוא פתרון כללי למשוואה $(t^2 - 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = 6t$ אם ידועים שני פתרונות

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}$$

18. מצא פתרון בעיית קושי $\ddot{x} = -\sin x - x$, $x(0) = 0, \dot{x}(0) = \varepsilon$, כאשר t משתנה בקטע סגור כלשהו סביב 0.

19. מצא פתרון בעיית קושי $\ddot{x} = -\varepsilon \sin t \cos x - x$, $x(0) = 2\varepsilon^3 - \varepsilon^2, \dot{x}(0) = \varepsilon^2$, כאשר t משתנה בקטע סגור כלשהו סביב 0.

20. מצא פתרון בעיית קושי $\ddot{y} + 2\dot{y} \cos \varepsilon + y - (e^t y + te^{-t} + \dot{y}) \sin \varepsilon = 0$, $y(0) = \tan \varepsilon, \dot{y}(0) = (1 + \varepsilon)^2$, כאשר t משתנה בקטע סגור כלשהו סביב 0.

21. חשב אקספוננטה e^{At} של המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. פתור את בעיית קושי $\dot{x} = Ax, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ מותר.

לא לחשב מכפלות מטריצות בתשובה הסופית. רמז: יכול להיות שימושי חישוב האקספוננטות של $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

22. מצא פתרון כללי למערכת משוואות (חפש דרך קלה!)

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

23. מה הם הערכים של n שבשבילם ישנה פונקציה חלקה $f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ כזו שלכל $t \in \mathbf{R}$ הפונקציות $y = t^3 + t^7$ ו- $y = t^3$ מקיימות את המשוואה $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$. לנמק.

24. מה הוא הסדר המינימלי של משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית עם מקדמים ממשיים קבועים כזאת שפונקציות $y = t^2 \cos t$, $y = t^4$ מקיימות אותה (לנמק)? מה היא המשוואה (עד לפרופורציונליות)?

25. איזה פונקציה t^2 או $t^2 + 1$ יכולה לשמש פתרון פרטי למשוואה לינארית מסדר שניים $\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0$ עם המקדמים a, b רציפים בכל $\mathbf{R}$? לנמק ולתת משוואה מתאימה כאשר זה אפשרי.

26. מצא את המקדמים $c_0, \dots, c_4$ של פיתוח טיילור $x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + o(t^4)$ בסביבה של $t = 0$ לפתרון בעיית קושי $\ddot{x} - t\dot{x} \cos t = \sin t$, $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.