

תרגיל 6

חלק 1

1. מצא קירוב מסוג ראסון בקטע זמן חסום כלשהו עבור פתרון למשוואה

$$y' = \sin x \cos y + \sin 2x \cos y \quad y(0) = \varepsilon$$

2. מצא קירוב ראסון בקטע זמן חסום כלשהו אג הנתון להלן

$$\begin{cases} y' = \sin(y-1+\varepsilon) + \sin \varepsilon \\ y(0) = 1+\varepsilon \end{cases} \quad \varepsilon \approx 0$$

3. נניח מארציה $A(t)$ וקצור $B(t)$ כך ש $A(t, B(t))$ פונקציה אינזובולטית של $[a, b]$.

נניח $|A(t)| \leq K$, $|B(t)| \leq K$ כאשר K מסומן. ניקח $\int_a^b |A(t)| dt < \infty$. ניקח $B(t) \in C^1$.

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = z \end{cases}$$

סימו לב שצד ימין לא רציף.

הראו כי קיימת פונקציה $\phi(t)$ (פיתרון לפי Caratheodory) כך ש $\phi \in C([a, b])$ ו-

$$t \in [a, b], \phi(t) = z + \int_{t_0}^t A(s)\phi(s) ds + \int_{t_0}^t B(s) ds$$

רמז: לראות שכל ההוכחות של המשפט על קיום ויחידות, המשפט על הארכת הפתרון עד לשפה נשארים מילולית עותו דבר.

4. נניח למשוואה $y' = x + \cos y$, $x \in [0, 1]$, נמן z כ $y(x) = z$ שן פתירות למשוואה כך ש $y(0) = 1$ ו $z(0) = 1.1$. נניח $|y(x) - z(x)|$ עבור $x \in [0, 1]$.

5. הצגו דוגמאות ל y_1, y_2 עבור $y_1 = y_2 = 0$ בנק' הקריטית

$$\begin{cases} y_1' = (1+y_1) \cos y_2 \\ y_2' = 1 - y_1 - \cos y_2 \end{cases}$$

6. נניח פונקציה $u, v \in C([x_0, x])$, $u > 0$, $v > 0$, $\varphi > 0$ כך ש

$$\varphi(x) \leq A + \int_{x_0}^x [\varphi(s)u(s) + v(s)] ds, \quad A > 0$$

הוכח כי $\varphi(x) \leq A e^{\int_{x_0}^x [u(s) + \frac{v(s)}{A}] ds}$ רמז: Gronwall-Bellman