

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

תרגיל 5

שאלה 1

נתונה הבעיה: $y' = 2y - 1, y(0) = 1$
א. מצא $y = \varphi(x)$ וחשב $\varphi(x)$ ב $x = 0.1, 0.2, 0.3$.
ב. השתמש שיטת אוילר כדי לקרב $\varphi(0.1), \varphi(0.2), \varphi(0.3)$ כאשר $h = 0.1$ הוא צעד האנטגרציה.

שאלה 2

נתונה הבעיה:
 $y' = 1 - x + y, y(x_0) = y_0$
א. הראה כי פתרון מדויק הוא: $y(x) = \varphi(x) = (y_0 - x_0)e^{x-x_0} + x$
ב. הראה בשיטת אוילר כי: $y_k(x) = (1+h)y_{k-1} + h - hx_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$
ג. הוכח כי $y_n(x) = (1+h)^n(y_0 - x_0) + x_n$. הראה כי $y_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ כאשר $h = (x - x_0)/n$ נשאר קבוע.

שאלה 3

פתור את המשוואות הבאות תחת תנאי ההתחלה:
$$\begin{cases} y'' + \sin(x^2)y' - \arctan(x)y = \arctan(x) \\ y(0) = -1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

שאלה 4

מה הם n שבשבילם יכולים להיות למשוואה $y^{(n)} = f(x, y)$ הפתרונות $y_1 = x$ ו $y_2 = x + x^4$ (שניהם ביחד)? ידוע שהפונקציה $f(x, y)$ חלקה.

שאלה 5

תהי $F(x, y)$ פונקציה יורדת במובן הרחב במשתנה y עבור כל x קבוע.
I. הראה כי אם f, g מקיימות את המשוואה $y' = F(x, y)$ אזי לכל $a < b$ מתקיים $|h(b)| \leq |h(a)|$ כאשר $h(x) = f(x) - g(x)$.
II. הסק מחלק א' משפט יחידות "חד - צדדי" (לכל $x \geq a$) למשוואה $y' = F(x, y)$ בצירוף תנאי ההתחלה $y(a) = y_0$.