

משוואות דיפרנציאליות רגילות 1

תרגיל 10

שאלה 1

תנועתו של קפיץ מתוח על גבי שולחן חלק נתונה ע"י המשוואה: $m\ddot{x} + kx = 0$. כאשר m היא מסת הקפיץ ו- k הוא קבוע הקפיץ. הראה כי סכום האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית של הקפיץ נשמרת והוא קבוע. הסבר כיצד ניתן להשתמש בעובדה זו על מנת להוריד את סדר המשוואה.

שאלה 2

פתור את המשוואות הליניאריות ההומוגניות הבאות, בעלות מקדמים קבועים:

א. $y'' - 2y' + y = 0$

ב. $y'' + 6y' + 13y = 0$

ג. $y'' - 6y' + 8y = 0$

ד. $y^{(4)} - 8y' = 0$

ה. $y^{(4)} - 16y = 0$

ו. $y^{(4)} + y'' - 2y = 0$

שאלה 3

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ (*)

א. הוכח כי אם $x^k \sin(x)$ פותר את (*) אז $n \geq 2k + 2$

ב. מצא פתרון ל (*) המקיים $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 1$ אם ידוע כי $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = -1$

ג. האם הפתרון שמצאת בחלק ב' הוא הפתרון היחיד המקיים את תנאי השאלה? נמק את תשובתך.

שאלה 4

באיזה משוואות יש רוזנס ומה הריבויים של השורשים הרזוננטיים? לפתור א, ב, ג.

א. $\ddot{y} - y = e^t$

ב. $\ddot{y} + 4y = 1 + \sin 2t + e^t$

ג. $\ddot{y} - y = t + 1 - \sin t$

ד. $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = t^2 \cos t + 1$

ה. $y^{(5)} - y^{(4)} = t + t^3 e^t$

ו. $y^{(4)} - 16y = t + \cos 2t - \tan t$

ז. $\ddot{y} - 8\dot{y} + 20y = e^{2t} \sin 2t + t^2 e^{4t} \cos 2t - e^{4t} \sin 2t$

ח. $\ddot{y} - 6\dot{y} + 10y = \frac{1}{t} e^{3t} \sin t + e^{3t} - t \sin t$