משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון 9

שאלה 1

מצאו בסיס למרחב הפתרונות **המרוכב** של המשוואה

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 5 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x$$

וממנו מצאו בסיס למרחב הפתרונות הממשי ע״י שימוש בפונקציות $\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x$.

תשובה 1

הע״ע של המטריצה הם כמובן $\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -6$. הו״ע המתאימים הם:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ולכן בסיס למרחב הפתרונות הוא $x_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-4t} \\ e^{-4t} \\ 2e^{-4t} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-6t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

הערה: מכיוון שכל הע״ע ממשיים, הבסיס הנ״ל הינו גם בסיס למרחב הפתרונות הממשיים כאשר לוקחים צרופים לינארים עם מקדמים ממשיים, וגם בסיס למרחב הפתרונות המרוכב המרוכבים כשלוקחים צרופים לינארים עם מקדמים מרוכבים.

שאלה 2

פתרו את המשוואה הבאה בעזרת שיטת המקדמים הבלתי תלויים, הסבירו מילולית מהם כל אחד מהשלבים בפתרון

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0.5 & 4.5 & -1.5 \\ 1.5 & -0.5 & 3.5 \end{pmatrix} x$$

תשובה 2

הערה: לשיטה הנ״ל **לא** קוראים שיטת המקדמים הבלתי תלויים, אלא **שיטת המקדמים הלא ידועים.**

כדי להשתמש בשיטת המקדמים הלא ידועים דבר ראשון צריך למצוא פולינום אופייני.

$$|tI - A| = \begin{vmatrix} t-5 & -1 & 1 \\ -0.5 & t-4.5 & 1.5 \\ -1.5 & 0.5 & t-3.5 \end{vmatrix} = (t-3)[(t-5)^2+1]$$

ולכן הע״ע הם $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5+i, \quad \overline{\lambda_2} = 5-i$.

$\lambda_1 = 3$ הוא מריבוי אחד ולכן הוא ״תורם״ לנו פתרון מהצורה $\begin{pmatrix} a_1 e^{3t} \\ a_2 e^{3t} \\ a_3 e^{3t} \end{pmatrix}$.

במרחב הפתרונות המרוכבים $\lambda_2 = 5+i,\ \overline{\lambda_2} = 5-i$ תורמים את שני פתרונות מהצורה

$$w(t) = \begin{pmatrix} \xi_1 e^{(5+i)t} \\ \xi_2 e^{(5+i)t} \\ \xi_3 e^{(5+i)t} \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1 e^{(5+i)t} \\ \zeta_2 e^{(5+i)t} \\ \zeta_3 e^{(5+i)t} \end{pmatrix}$$
, אבל נוכל להוציא פתרון ממשי מהצורה ,

$$\begin{pmatrix} b_1 e^{5t}\cos t + c_1 e^{5t}\sin t \\ b_2 e^{5t}\cos t + c_2 e^{5t}\sin t \\ b_3 e^{5t}\cos t + c_3 e^{5t}\sin t \end{pmatrix}.$$

הערה: $ve^{5t}\cos t$ אינו חייב להיות פתרון עבור אף v.

ועכשיו הפתרון שלנו הוא חייב להיות מהצורה

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{3t} + b_1 e^{5t}\cos t + c_1 e^{5t}\sin t \\ a_2 e^{3t} + b_2 e^{5t}\cos t + c_2 e^{5t}\sin t \\ a_3 e^{3t} + b_3 e^{5t}\cos t + c_3 e^{5t}\sin t \end{pmatrix} \tag{1}$$

ולכן הנגזרת שלו תהיה :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5b_1 e^{5t}\cos t + c_1 e^{5t}\cos t - b_1 e^{5t}\sin t + 5c_1 e^{5t}\sin t + 3a_1 e^{3t} \\ 5b_2 e^{5t}\cos t + c_2 e^{5t}\cos t - b_2 e^{5t}\sin t + 5c_2 e^{5t}\sin t + 3a_2 e^{3t} \\ 5b_3 e^{5t}\cos t + c_3 e^{5t}\cos t - b_3 e^{5t}\sin t + 5c_3 e^{5t}\sin t + 3a_3 e^{3t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3a_1 e^{3t} + (c_1 + 5b_1)e^{5t}\cos t + (5c_1 - b_1)e^{5t}\sin t \\ 3a_2 e^{3t} + (c_2 + 5b_2)e^{5t}\cos t + (5c_2 - b_2)e^{5t}\sin t \\ 3a_3 e^{3t} + (c_3 + 5b_3)e^{5t}\cos t + (5c_3 - b_3)e^{5t}\sin t \end{pmatrix}$$

וכדי שיהיה פתרון נדרוש כי
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0.5 & 4.5 & -1.5 \\ 1.5 & -0.5 & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + y - z \\ 0.5x + 4.5y - 1.5z \\ 1.5x - 0.5y + 3.5z \end{pmatrix}.$$

נשווה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 5x + y - z \\ 0.5x + 4.5y - 1.5z \\ 1.5x - 0.5y + 3.5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 e^{3t} + (c_1 + 5b_1)e^{5t}\cos t + (5c_1 - b_1)e^{5t}\sin t \\ 3a_2 e^{3t} + (c_2 + 5b_2)e^{5t}\cos t + (5c_2 - b_2)e^{5t}\sin t \\ 3a_3 e^{3t} + (c_3 + 5b_3)e^{5t}\cos t + (5c_3 - b_3)e^{5t}\sin t \end{pmatrix}.$$

עכשיו נשווה בין המקדמים של כל אחת מהפונקציות

ונקבל 9 משוואות ב-9 נעלמים $\{a_i, b_j, c_k\}_{i,j,k=1}^{3}$.

ניתן כמה דוגמאות למשוואות אלו :

המקדם של e^{3t} בשורה של $\dot{x}$ נותן את המשוואה : $5a_1 + a_2 - a_3 = 3a_1$

המקדם של $e^{5t}\cos t$ בשורה של $\dot{y}$ נותן את המשוואה : $0.5b_1 + 4.5b_2 - 1.5b_3 = 5b_2 + c_2$

המקדם של $e^{5t}\sin t$ בשורה של $\dot{z}$ נותן את המשוואה : $1.5c_1 - 0.5c_2 + 3.5c_3 = 5c_3 - b_3$

וכך ממשיכים ומקבלים עוד 6 משוואות. ואז פותרים את המערכת הלינארית, והפתרון הכללי שלה יהווה את המקדמים בנוסחא (1). וזה הסוף (בהנחה שאנחנו פותרים את המערכת הלינארית).

שאלה 3

נסתכל על המערכת $\dot{x} = Ax$, כאשר $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית עם ע"ע $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

א. מה ניתן לומר על מישור הפאזה כאשר $\lambda > 0$ ו- $\mu < 0$. נסו לצייר דיוקן של מישור הפאזה (דיוקן= לצייר את הקווים האינטגרלים= לצייר את הפתרונות)

ב. אותה השאלה לגבי $\lambda = a + bi,\ a > 0, b \neq 0$ (אם יש ע"ע מרוכב למטריצה ממשית אז מייד נקבע עוד ע"ע: הצמוד)

ג. **לשעשוע**: נסו לצייר את כל האפשרויות ע"פ הע"ע.

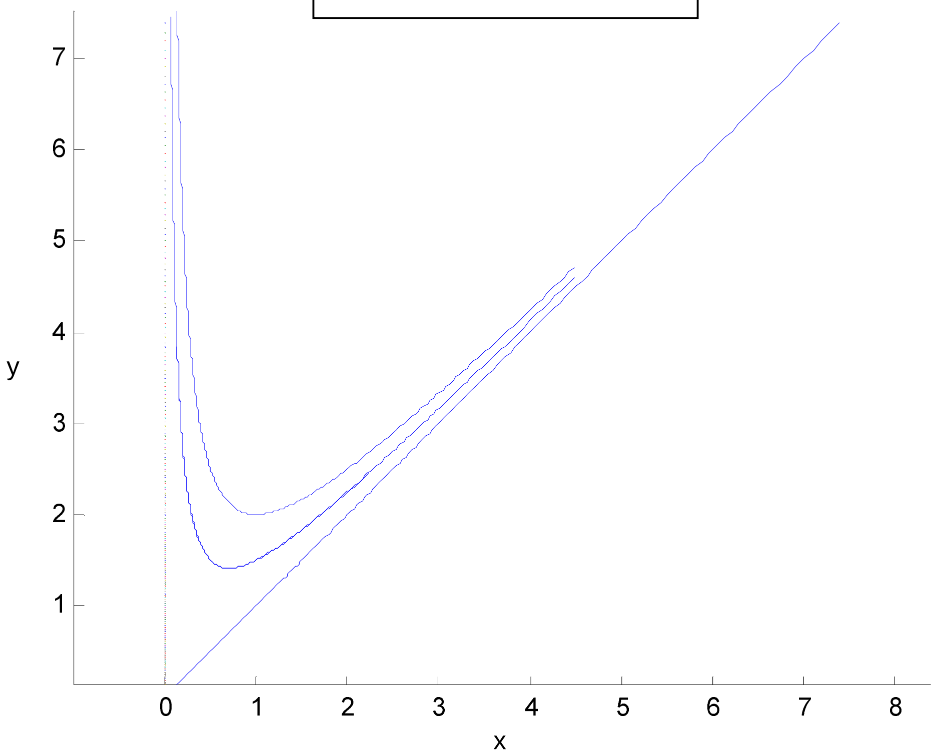
תשובה 3

א. אם $\lambda > 0$ ו- $\mu < 0$, אז כמובן שהם ממשיים (כי אחרת אין דבר כזה >). הפתרונות יראו מהצורה $aue^{\mu t} + bve^{\lambda t}$ כאשר u, v הם הו"ע המתאימים.

ברור כי $\begin{matrix} \left|e^{\lambda t}\right| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty, & \left|e^{\lambda t}\right| \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \\ \left|e^{\mu t}\right| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, & \left|e^{\mu t}\right| \xrightarrow[t\to-\infty]{} \infty \end{matrix}$ (כי $\lambda > 0$ ו- $\mu < 0$) ולכן כש- $t \to \infty$

הפתרונות ישאפו ל ∞ בכוון v , ול- 0 בכוון u ולהפך כש $t \to -\infty$. כלומר הפתרונות יהיו היפרבולות בציור זה נראה כך:

כמה פתרונות עם ע"ע 1 ו- -1



ב. במקרה הזה הפתרונות יראו כך $cue^{\mu t}+dve^{\lambda t}$, כאשר u,v הם הו״ע המתאימים. נפתח את זה $x(t)=\underbrace{aue^{\mu t}+bve^{\lambda t}}_{\lambda=\bar{\mu}=a+ib}=\underbrace{e^{at}(\tilde{u}\cos bt+\tilde{v}\sin bt)}_{e^{(a+bi)t}=e^{at}(\cos bt+i\sin bt)}$, מכך ש- $a>0$ נובע ש- $\|x(t)\|\xrightarrow[t\to\infty]{}\infty,\quad \|x(t)\|\xrightarrow[t\to-\infty]{}0$ עוד נשים לב כי $x(t)e^{-at}=\tilde{u}\cos bt+\tilde{v}\sin bt$ הוא מחזורי 2π ולכן ניתן לשים לב כי הפתרון יהיה ספירלה (יוהוו) ובציור:

כמה פתרונות עבור ע״ע $\lambda=1\pm i$