משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון 8

שאלה 1

פתרו לפחות שתיים מהמשוואות הבאות בעזרת e^{At} או בעזרת הנוסחא המקוצרת, שימו לב כי בתרגיל הקודם מצאתם את צורות זורדן של המטריצות.

א. $\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \underline{x}$

ב. $\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 98 & 1 \\ -4 & 102 \end{pmatrix} \underline{x}$

ג. $\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$

ד. $\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 68 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$

תשובה 1

א. בסיס ז׳ורדן הוא $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ וצורת ז׳ורדן היא $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. ולכן הפתרון הכללי למשוואה הנ״ל הוא $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{9t} \\ 2e^{9t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{7t} \\ 4e^{7t} \end{pmatrix}$.

ב. צורת זורדן היא $\begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$ ובסיס ז׳ורדן $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. הפתרון הכללי למשוואה הוא $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{100t} \\ 2e^{100t} \end{pmatrix} + c_2 \left[\begin{pmatrix} e^{100t} \\ 3e^{100t} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} e^{100t} \\ 2e^{100t} \end{pmatrix} \right]$.

ג. בסיס ז׳ורדן $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ וצורת ז׳ורדן $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. פתרון כללי הוא $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

ד. בסיס ז׳ורדן $v_3=\begin{pmatrix}17\\1\\0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. צורת ז׳ורדן $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$. והפתרון הכללי הוא

$$x(t)=c_1\begin{pmatrix}e^t\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\0\\e^t\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}17e^{5t}\\e^{5t}\\0\end{pmatrix}$$

שאלה 2

תהי $\dot{x}=Ax$ משוואה לינארית כאשר $A_{n\times n}$ מטריצה, ו- $x=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

א. הוכיחו כי אם $x(t)\,\&\,y(t)$ פתרונות של המערכת אז $x(t)+y(t)$ פתרון, ואם α סקלר אז $\alpha x(t)$ גם פתרון. הסיקו מכך כי אוסף הפתרונות של המשוואה $\dot{x}=Ax$ הוא מרחב לינארי.

ב. מצאו את מימד המרחב מסעיף א׳.
(רמז: השתמשו במשפט הקיום והיחידות באופן הבא: קחו n פתרונות ל- n תנאי ההתחלה הבאים $x(0)=e_1,\dots,x(0)=e_n$ כאשר $e_1,\dots,e_n$ הם אברי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^n$, והראו כי פתרונות אלו מהווים בסיס למרחב).

תשובה 2

א. $\frac{d(x+y)}{dt}=\dot{x}+\dot{y}\underset{\substack{\dot{x}=Ax\\\dot{y}=Ay}}{=}Ax+Ay=A(x+y)$ ולכן $x(t)+y(t)$ פתרון.

$\frac{d(\alpha x)}{dt}=\alpha\dot{x}\underset{\dot{x}=Ax}{=}\alpha Ax=A(\alpha x)$ ולכן $\alpha x(t)$ גם פתרון. נשים לב כי הפונקציה הקבועה $x\equiv 0$ היא גם פתרון ולכן אוסף הפתרונות של המשוואה $\dot{x}=Ax$ הינו תת מרחב לינארי של הפונקציות הרציפות מעל $\boldsymbol{R}$.

ב. נקח n פתרונות $x_1,\dots,x_n$ כך ש $x_1(0)=e_1,\dots,x_n(0)=e_n$ ונראה כי הם בסיס למרחב הפתרונות של $\dot{x}=Ax$. נוכיח אי תלות לינארית: אם $a_1x_1+\ldots+a_nx_n\equiv 0$ כפונקציות אז בפרט $a_1x_1(0)+\ldots+a_nx_n(0)=0$ אבל $x_1(0),\dots,x_n(0)$ הם בת״ל ולכן $a_1=\ldots=a_n=0$, ולכן $x_1,\dots,x_n$ בת״ל. נוכיח כי הם פורשים יהי $y(t)=0$ פתרון של $\dot{x}=Ax$ נראה כי הפתרון הוא צרוף לינארי של $x_1,\dots,x_n$. $x_1(0),\dots,x_n(0)$ הם קבוצת וקטורים פורשים ב- $\mathbf{R}^n$ ולכן $\exists a_1,\cdots,a_n$ כך ש $a_1x_1(0)+\ldots+a_nx_n(0)=y(0)$ ולכן **מיחידות** הפתרון של משוואה לינארית נובע כי $a_1x_1+\ldots+a_nx_n\equiv y$ מש״ל

הערה חשובה: בעצם הוכחנו כי אם יש n פתרונות למשוואה לינארית ובנקודה מסוימת הם בת״ל (או פורשים) אז הם בת״ל (או פורשים) כוקטורים במרחב הפתרונות של המשוואה.

שאלה 3

תהי $A_{n\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ מטריצה ממשית דהיינו $\forall i,j\ a_{ij}\in\mathbf{R}$.

א. הוכיחו כי עם $\mathbf{C} \ni \lambda = \alpha + i\beta$ הוא ע״ע של A, אז גם $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ הוא ע״ע של A.

ב. אם $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$ הוא ו״ע מתאים ל- λ, $\overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \vdots \\ \overline{v}_n \end{pmatrix}$ הוא ו״ע המתאים ל- $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$.

הערה: זה נכון גם לבסיס ז׳ורדן דהיינו אם $v_1,\cdots,v_n$ בסיס ז׳ורדן לבלוק של λ, אז $\overline{v}_1,\cdots,\overline{v}_n$ בסיס ז׳ורדן לבלוק של $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$.

תשובה 3

א. נניח כי $P(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ הוא הפולינום האופייני של A. מכך ש- A ממשית נובע כי כל מקדמי - $P(t)$ הם ממשיים. נניח כי $\lambda \in \mathbf{C}$ הוא ע״ע ולכן

$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ נעשה למשוואה זו הצמדה ונקבל כי

$\overline{P(\lambda)} = \overline{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n} = \overline{\lambda}^n + a_1\overline{\lambda}^{n-1} + \cdots + a_n = P(\overline{\lambda})$, ולכן

$P(\overline{\lambda}) = \overline{P(\lambda)} = \overline{0} = 0$ כלומר $\overline{\lambda} \in \mathbf{C}$ הוא ע״ע של A.

ב. נניח כי $Av = \lambda v$. מכך ש- A ממשית נקבל כי $\overline{Av} = A\overline{v}$. נפעיל הצמדה ונקבל $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$ וזה מש״ל.

בשאלה 4 היתה טעות. זאת השאלה המתוקנת:

שאלה 4

תהי $\dot{x} = Ax$ משוואה לינארית כאשר $A_{n\times n}$ מטריצה ממשית. נניח גם כי יש $\lambda \notin \mathbf{R}$ ע״ע של A.

נסמן $x(t) = e^{\lambda t}c$, כאשר $\mathbf{C} \ni c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ו״ע של λ. (שימו לב כי אם $\lambda \notin \mathbf{R}$ אז $e^{\lambda t}$ לא פונקציה ממשית).

א. הוכיחו כי $\operatorname{Re}(x(t)), \operatorname{Im}(x(t))$ הם גם כן פתרונות למשוואה $\dot{x} = Ax$.

ב. הוכיחו כי $\operatorname{Re}(x(t)), \operatorname{Im}(x(t))$ הם בת״ל.

ג. יהיו $x_1,\cdots,x_n$ פתרונות (לאו דוקא ממשיים) בסיסיים (מהווים בסיס למרחב הפתרונות). הוכיחו כי $\operatorname{Re} x_1,\cdots,\operatorname{Re} x_n$ ו- $\operatorname{Im} x_1,\cdots,\operatorname{Im} x_n$ פורשים מעל $\mathbf{R}$ את מרחב הפתרונות.

ד. האם סעיפים ב׳ ו- ג׳ לא מהווים סתירה לכך שמימד מרחב הפתרונות הוא n ?

תשובה 4

א. נשים לב כי לכל פונקציה $f(t)$ מתקיים $\frac{d\operatorname{Im} f(t)}{dt} = \operatorname{Im}\frac{df(t)}{dt}$, $\frac{d\operatorname{Re} f(t)}{dt} = \operatorname{Re}\frac{df(t)}{dt}$.

ולכן $\frac{d(\operatorname{Re} x)}{dt} = \operatorname{Re}\frac{dx}{dt} = \operatorname{Re} Ax \underset{A\text{ is real}}{=} A\operatorname{Re} x$

ובאותו אופן $\frac{d(\operatorname{Im} x)}{dt} = \operatorname{Im}\frac{dx}{dt} = \operatorname{Im} Ax \underset{A\text{ is real}}{=} A\operatorname{Im} x$. ולכן $\operatorname{Re}(x(t)), \operatorname{Im}(x(t))$ פתרונות.

ב. נסמן $y(t)=\overline{x(t)}$ את הפתרון הצמוד של x. ברור ש x,y בת״ל מעל $\mathbf{C}$ (למשל ע״י הצבה נראה כי הם בת״ל ב- 0 ולכן הם בת״ל כפונקציות). מתקיים כמובן ש $\begin{matrix} \operatorname{Re} x=\frac{x+y}{2} \\ \operatorname{Im} x=\frac{x-y}{2i} \end{matrix}$. ולכן $\operatorname{Re} x,\operatorname{Im} x$ מתקבלים כטרנספורמציה הפיכה משני וקטורים (פונקציות) בת״ל מעל $\mathbf{C}$ ולכן $\operatorname{Re} x,\operatorname{Im} x$ בת״ל בעצמם מעל $\mathbf{C}$ ובפרט מעל $\mathbf{R}$. מש״ל.

לתשומת לבך: לא השתמשנו בצורה הספציפית של x, אלא רק בעובדה ש $x\in\mathbf{C}-(\mathbf{R}\cup i\mathbf{R})$ כלומר בעובדה ש $\operatorname{Re} x\neq 0,\operatorname{Im} x\neq 0$.

ג. $x_1,\cdots,x_n$ פורשים מעל $\mathbf{C}$. נרצה להוכיח כי $\operatorname{Re} x_1,\cdots,\operatorname{Re} x_n$ ו- $\operatorname{Im} x_1,\cdots,\operatorname{Im} x_n$ פורשים מעל $\mathbf{R}$ את מרחב הפתרונות הממשיים. יהי z ממשי, פתרון למשוואה. מכך ש $x_1,\cdots,x_n$ פורשים מעל $\mathbf{C}$ נובע כי

$$
\begin{aligned}
z &\equiv (a_1+ib_1)x_1+\cdots+(a_1+ib_1)x_n = \\
&=(a_1+ib_1)(\operatorname{Re} x_1+i\operatorname{Im} x_1)+\cdots+(a_1+ib_1)(\operatorname{Re} x_n+i\operatorname{Im} x_n)= \\
&=a_1\operatorname{Re} x_1-b_1\operatorname{Im} x_1+\cdots+a_n\operatorname{Re} x_n-b_n\operatorname{Im} x_n+ \\
&+i\left[a_1\operatorname{Im} x_1+b_1\operatorname{Re} x_1+\cdots+a_n\operatorname{Im} x_n+b_n\operatorname{Re} x_n\right]
\end{aligned}
$$

אבל בגלל ממשיות z נובע כי $z\equiv a_1\operatorname{Re} x_1-b_1\operatorname{Im} x_1+\cdots+a_n\operatorname{Re} x_n-b_n\operatorname{Im} x_n$ ולכן $\operatorname{Re} x_1,\cdots,\operatorname{Re} x_n$ ו- $\operatorname{Im} x_1,\cdots,\operatorname{Im} x_n$ פורשים מעל $\mathbf{R}$ את מרחב הפתרונות הממשיים. מש״ל.

ד. הם לא מהווים סתירה כי עבור x,y מסעיף ב׳ מתקיים $\begin{matrix} \operatorname{Re} x=\operatorname{Re} y \\ \operatorname{Im} x=-\operatorname{Im} y \end{matrix}$

ולכן יצטמצמו חצי מהפונקציות $\operatorname{Re} x_1,\cdots,\operatorname{Re} x_n$ ו- $\operatorname{Im} x_1,\cdots,\operatorname{Im} x_n$ ונשאר עם n פונקציות בת״ל ופורשים.