משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון 7

שאלה 1

הוכיחו כי $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$ כאשר A מטריצה מסדר $n \times n$. (רמז: השתמשו במשפט שאומר שמותר לגזור איבר איבר את הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ והזכרו מהי הגדרת e^{At}).

תשובה 1

ברור כי אם C מטריצה של קבועים, אז $\frac{d}{dt}\left(Ct^n\right) = C\frac{d}{dt}\left(t^n\right) = nCt^{n-1}$. נזכר כי $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ ושמותר לגזור את הטור הנ"ל איבר איבר. ולכן

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{A^k t^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k k t^{k-1}}{k!} = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \underset{r=k-1}{=}$$

$$= A\sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r t^r}{r!} = Ae^{At}$$

מש"ל

שאלה 2

הוכיחו כי אם A, B מטריצות מתחלפות אזי $e^{A+B} = e^A e^B$ והשתמשו בעובדה זו על מנת למצוא את המטריצה e^{Jt} כאשר

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

תשובה 2

$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!}$ נניח כי $AB = BA \Leftarrow$ ניתן לפתוח את הסוגריים כמו בבינום של ניוטון

$$e^{A+B}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{n!(n-k)!k!}A^kB^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}A^kB^{n-k}=\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^l}{l!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}\right)$$

וזה מסיים את חלק א׳. לחלק השני נבחין כי אם $J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}$ אז בעצם

כאשר $J=\lambda I+J_0$ $J_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$. λI מתחלפת עם כל מטריצה בפרט עם J_0. ולכן

לפי החלק הראשון $e^{Jt}=e^{\lambda It+J_0t}=e^{\lambda It}e^{J_0t}$. אנו ראינו בתרגול כי

$e^{\lambda It}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & 0 & & \\ 0 & e^{\lambda t} & \ddots & \\ & & \ddots & 0\\ & & & e^{\lambda t}\end{pmatrix}=e^{\lambda t}\cdot I$. כדי לחשב את e^{J_0} נזכר כי J_0 נילפוטנטית כלומר

$J_0^n=0_{n\times n}$ ולכל $k<n$ $J_0^k=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ & & . & & 0 & \ddots & 0\\ & & & . & & \ddots & 1\\ & & & & . & & 0\\ & & & & & & \vdots\\ & & & & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$ ולכן

$e^{J_0t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_0^kt^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{J_0^kt^k}{k!}=\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^n}{n!}\\ & 1 & t & \ddots & \vdots\\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!}\\ & & & \ddots & t\\ & & & & 1\end{pmatrix}$. נציב את התוצאות הנ״ל:

$$e^{Jt}=e^{\lambda It}e^{J_0t}=e^{\lambda t}I\cdot\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^n}{n!}\\ & 1 & t & \ddots & \vdots\\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!}\\ & & & \ddots & t\\ & & & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t & e^{\lambda t}\frac{t^2}{2!} & \cdots & e^{\lambda t}\frac{t^n}{n!}\\ & e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t & \ddots & \vdots\\ & & e^{\lambda t} & \ddots & e^{\lambda t}\frac{t^2}{2!}\\ & & & \ddots & e^{\lambda t}t\\ & & & & e^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

שאלה 3

חשבו את צורות זורדן ואת בסיסי זורדן של המטריצות הבאות : (לפחות שלוש)

א. $A_1=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -8 & 13\end{pmatrix}$

ב. $A_2=\begin{pmatrix}98 & 1\\ -4 & 102\end{pmatrix}$

ג. $A_3=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

ד. $A_4=\begin{pmatrix}1 & 68 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

תשובה 3

א. לפני הכל נמצא את הע״ע של המטריצה $A_1=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -8 & 13\end{pmatrix}$ נעשה זאת ע״י חישוב הפולינום האופייני. $\det(tI-A_1)=\begin{vmatrix}t-3 & -3\\ 8 & t-13\end{vmatrix}=(t-9)(t-7)$. כלומר הע״ע הם $\lambda_1=9,\ \ \lambda_2=7$. מזה אנו מסיקים כי המטריצה לכסינה. נמצא את הבסיס העצמי. לע״ע $\lambda_1=9$ נחשב איזה וקטור פותר את $(9I-A_1)v=0$ לצורך זה נדרג את המטריצה $9I-A_1=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 8 & -4\end{pmatrix}$ ואז הו״ע הוא $v_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$. באותו אופן נמצא ו״ע שמתאים לע״ע $\lambda_2=7$, ונקבל $v_2=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$ הוא הו״ע המתאים. כלומר נסמן $K_1=(v_1,v_2)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, ומתקיים $K_1A_1K_1^{-1}=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$.

לסיכום $\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$ היא צורת זורדן ו- v_1,v_2 הוא בסיס זורדן.

ב. בסעיף זה נקבל פולינום אופייני $\det(tI-A_1)=\begin{vmatrix}t-98 & -1\\ 4 & t-102\end{vmatrix}=(t-100)^2$. נבדוק מהו הריבוב הגאומטרי של הע״ע (היחיד) $\lambda=100$. כזכור הריבוב הגאומטרי הינו המספר המקסימלי של ו״ע בת״ל. כדי לבדוק זאת נבדוק מה דרגת המטריצה $(100I-A_2)$, כלומר נדרג אותה : $100I-A_2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, ולכן הדרגה הינה 1 ולכן הריבוב הגאומטרי=*2-1* =1 כלומר המטריצה לא לכסינה. צורת זורדן תהיה $\begin{pmatrix}100 & 1\\ 0 & 100\end{pmatrix}$. כדי למצוא את הבסיס זורדן נצטרך למצוא ו״ע v_1 ולמצוא וקטור v_2 כך שיתקיים $A_2v_1=100\cdot v_1$ ו- $A_2v_2=100\cdot v_2+v_1$. ראשית נמצא את v_1 הוא וקטור שפותר את

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 100I - A_2$ ולכן $v_1 = \frac{1}{2}$. הוקטור v_2 פותר את

$A_2 v_2 = 100 \cdot v_2 + v_1$ ולכן מתקיים $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} v_2$ כלומר (לאחר שיטות רגילות של

דרוג) נקבל $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. לסיכום צורת זורדן היא $\begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$ ובסיס זורדן הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ג. באותו אופן כמו בסעיפים הקודמים, פה נקבל פולינום אופייני $\det(\lambda I - A_3) = (\lambda - 2)^2 \lambda$.

כלומר הע"ע הם $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. נמצא ו"ע. עבור ע"ע $\lambda_1 = 0$ נדרג את

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3$. וכן הו"ע הוא $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. עבור ע"ע $\lambda_2 = 2$ נמצא ו"ע

נדרג את $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2I - A_3 \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ולכן הו"ע עבור $\lambda_2 = 2$ הוא

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. מכיוון ואין לנו בסיס של ו"ע המטריצה לא לכסינה ולכן צורת ז'ורדן היא

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. כדי למצוא את בסיס ז'ורדן עלינו למצוא וקטור שלישי המקיים

$A_3 v_3 = v_2 + 2v_3 \Leftarrow (A_3 - 2I)v_3 = v_2$ (כי העמודה השלישית הינה ההצגה של הוקטור לפי

הבסיס v_1, v_2, v_3 ולכן נפתור את $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} v_3$. גם כאן נעשה זאת ע"י דרוג

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \leftarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. כלומר נקח למשל $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ואז v_1, v_2, v_3 בסיס

זורדן. אם נסמן $K_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ נקבל כי $K_3^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} K_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3$

ד. במקרה זה הפולינום האופייני הינו $(t-1)^2(t-5)$ נמצא ו"ע: $(A_4 - I) = \begin{pmatrix} 0 & 68 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

מכאן רואים כי ישנם שני ו"ע בת"ל עבור ע"ע $\lambda = 1$ והם $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. עבור ע"ע

$\mu = 5$ באותו אופן נקבל ו"ע $v_3 = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. כמובן שמזה נובע כי המטריצה לכסינה. נסמן

$K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ואז נקבל $K_4^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 68 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_4$.

שאלה 4

פתרו לפחות שתיים מהמשוואות הבאות בעזרת e^{At} או בעזרת הנוסחא המקוצרת, שימו לב כי בשאלה הקודמת מצאתם את צורות זורדן של המטריצות.

א. $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \underline{x}$

ב. $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 98 & 1 \\ -4 & 102 \end{pmatrix} \underline{x}$

ג. $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$

ד. $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 68 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$

תשובה 4

יופיע בפתרון הבא