משוואות דיפרנציאליות רגילות

תרגיל 6

שאלה 1

פיתרו את המשוואות הבאות תחת תנאי ההתחלה:

א. $\begin{cases} y'' + \sin\left(x^2\right)y' - \arctan(x)y = \arctan(x) \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x^2 y'' = \left(y'\right)^2 \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} yy'' = \left(y'\right)^3 \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$

תשובה 1

א. קל לראות כי $y(x) = -1$ פותר את המשוואה. מכיוון ש $\arctan(x)$, $\sin\left(x^2\right)$ הן פונקציות רציפות, הפתרון הוא יחיד.

ב. נציב $p = y'$ ונקבל: $x^2 p' = p^2 \Leftarrow \frac{dp}{p^2} = \frac{dx}{x^2} \Leftarrow -\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} + c \Leftarrow p = \frac{x}{1-cx}$,

$p(1) = 1 \Leftarrow p = x \Leftarrow y = \frac{x^2}{2} + d$, $y(1) = 1 \Leftarrow y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$.

ג. נציב $p = y'$ ונקבל: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} \Leftarrow y'' = \frac{dp}{dy}y' \Leftarrow y\frac{dp}{dy}p = p^3 \Leftarrow$ אם $p = 0$

נקבל $y = c$ שלא מקיים את תנאי ההתחלה. אחרת $\frac{dp}{p^2} = \frac{dy}{y} \Leftarrow \frac{1}{p} = c - \ln|y| \Leftarrow$

$\frac{dx}{dy} = c - \ln|y| \Leftarrow x = cy - y\ln|y| + y + d$ ומחישוב הקבועים: $x = y\left(2 - \ln|y|\right) - 1$.

שאלה 2

פיתרו את המערכות הבאות:

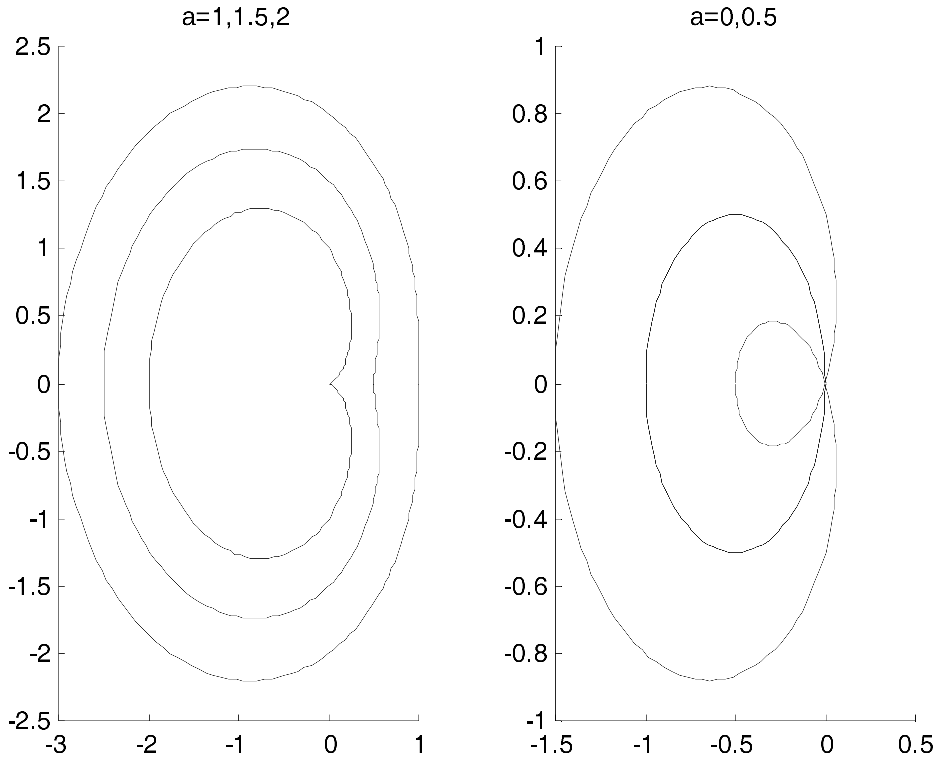
א. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy\left(y^2 + 1\right)} \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{y^2 + 1}\left(1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right) \end{cases}$ וציירו את מישור הפאזה x, y.

ב. $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \left(r^2+\theta^2+1\right)\tan\theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{r^2+\theta^2+1}{\cos\theta} \end{cases}$ ציירו את מישור הפאזה x, y (את הקוים האינטגרלים דהיינו הפתרונות) כאשר $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$.

תשובה 2

א. נשתמש במשפט הפונקציה הסתומה ואז- $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\dfrac{y}{x}$ $\Leftarrow$ אחרי הפרדת משתנים ואינטגרציה $y = cx$. המשוואה לא מוגדרת עבור $x = 0 \vee y = 0$. מישור הפאזה יהיה היפרבולי כמו בתרגיל 1 שאלה 6.

ב. גם פה נשתמש במשפט הפונקציה הסתומה ונקבל $\sin\theta = \dfrac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \dfrac{dr}{d\theta} \Leftarrow r = a - \cos\theta$ (כמובן שבקואורדינטות פולריות $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ ולכן את הקבוע a יש לבחור בהתאם). הצורה שהפתרונות הללו מתווים נקראת *Limacon of Pascal* נצייר אותם עבור כמה מקרים של הקבוע a.



עבור $a = 1$ הצורה הנ"ל נקראת גם *Cardiod*.

שאלה 3

בצעו ליניאריזציה של המערכות הבאות סביב הנקודה (x_0, y_0) :

א. $\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(1 + x + y^2\right) + \dfrac{\cos x - 1}{x} \\ \dot{y} = \arcsin(2y + x) - (x + y)^6 \end{cases}$ $x_0 = 0, y_0 = 0$.

ב. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x - 7y) + \cos(x - 7y) - 1 \\ \pi e^{3y} - \pi \end{pmatrix}$ $x_0 = 0, y_0 = 0$.

ג. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 y - 6x + y + 3x^2 + 3 - 2xy \\ \dot{y} = 3x - y - 3 + xy \end{cases}$ $x_0 = 1, y_0 = -3$.

תשובה 3

א. נשתמש בטורי טיילור של הפונקציות הבאות $\arcsin\alpha \approx \alpha$ $\ln(1+\alpha) \approx \alpha,$ כאשר הסימן $\approx$ מציין שהזנחנו את הגורמים ממעלה גדולה משתיים. אנו יודעים כי $\cos\alpha = 1 - \dfrac{\alpha^2}{2} + \overset{=}{o}\left(\alpha^3\right)$ ולכן $\dfrac{\cos\alpha - 1}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{2} + \overset{=}{o}\left(\alpha^2\right)$. ועכשיו נעשה ליניאריזציה (כלומר נזניח את הגורמים הלא ליניאריים) ונקבל $\begin{cases} \dot{x} = x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{3x}{2} \\ \dot{y} = 2y + x \end{cases}$.

ב. הפעם יש לנו טור טיילור נוסף : $e^{\alpha} - 1 \approx \alpha$ ולכן הליניאריזציה תהייה : $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 7y \\ 3\pi y \end{pmatrix}$

ג. בסעיף זה אין ברירה אלא לחשב את הדיפרנציאל של הפונקציה
$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 y - 6x + y + 3x^2 + 3 - 2xy \\ 3x - y - 3 + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2xy - 6 + 6x - 2y \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x}(1,-3) = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x^2 + 1 - 2x \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}(1,-3) = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3 + y \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}(1,-3) = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = -1 + x \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial y}(1,-3) = 0$$

$$\Leftarrow \quad DF(1,-3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ואז הליניאריזציה תצא $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$