משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל 5

שאלה 1

תהי $\sigma(x)$ המקיימת לכל $x\in[a,b]$ $\sigma'(x)\le k\sigma(x)$ (k קבוע)

א. הוכיחו כי לכל $x\in[a,b]$ מתקיים: $\sigma(x)\le e^{k(x-a)}\sigma(a)$

ב. הוכיחו כי אם $\sigma(x)$ אי שלילית ו $\sigma(a)=0$ אז $\sigma(x)\equiv 0$

ג. השתמשו בתוצאות הסעיפים הקודמים על מנת להוכיח את משפט היחידות הבא: תהי $F(x,y)$ פונקצית ליפשיץ בקטע $[a,b]$ ויהיו f,g שתי פונקציות המקיימות לכל $x\in[a,b]$ את המשוואה: $y'=F(x,y)$ בצירוף תנאי ההתחלה $y(a)=y_0$ אזי $f\equiv g$.

רמז: הגדרו $\sigma=(f-g)^2$

ד. הוכח את סעיף ג' בהסתמך על כך ששני הפתרונות f,g הם נקודות שבת של קרוב פיקארד:

$$f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(x,f(x))dx\ .$$

תשובה 1

א. $\sigma'(x)\le k\sigma(x)\ \Leftarrow\ \sigma'(x)-k\sigma(x)\le 0\ \Leftarrow\ e^{-kx}\sigma'(x)-ke^{-kx}\sigma(x)\le 0\ \Leftarrow$

$\left(e^{-kx}\sigma(x)\right)'\le 0\ \Leftarrow\ e^{-kx}\sigma(x)$ יורדת $\Leftarrow\ e^{-kx}\sigma(x)\le e^{-ka}\sigma(a)\ \Leftarrow\ \sigma(x)\le e^{k(x-a)}\sigma(a)$.

ב. נציב $\sigma(a)=0$ בחלק א' ונקבל $\sigma(x)\le 0$ אך מהנתון $\sigma(x)\ge 0$ ולכן $\sigma(x)\equiv 0$.

ג. נגדיר לפי הרמז: $\sigma=(f-g)^2$. $\sigma'=2(f-g)(f'-g')$ אך f,g מקיימות את המשוואה ולכן:

$$\sigma'=2(f-g)(f'-g')=2(f-g)(F(x,f)-F(x,g))\le 2|f-g|\cdot|F(x,f)-F(x,g)|$$

נשתמש בליפשיציאניות של $F(x,y)$ ונקבל:

$\sigma'\le 2|f-g|\cdot|F(x,f)-F(x,g)|\le 2L|f-g|^2=2L\sigma$, ומקיימים תנאי חלק א'. מלבד זאת מקיימים גם תנאי חלק ב' כי $\sigma=(f-g)^2\ge 0$ וכן $\sigma(a)=(f(a)-g(a))^2=0$ ולכן מתקיים $\sigma(x)\equiv 0$ או $f\equiv g$.

ד. בעיית קיום ויחידות לבעיית ההתחלה $\begin{cases}y'=F(x,y)\\ y(\eta)=\xi\end{cases}$ שקולה לבעייה האינטגרלית

$y(x)=\xi+\int_{\eta}^{x}F(s,y(s))ds$ דהיינו כל פתרון של הראשונה הינו פתרון של השנייה ולהפך.

אם נסמן $A(f)=\xi+\int_{\eta}^{x}F(s,f(s))ds$ אז הבעייה האינטגרלית שקולה לשאלה האם יש נקודת שבת לאופרטור A (כי נקודת שבת לפי ההגדרה מקימת

$f=A(f)=\xi+\int_{\eta}^{x}F(s,f(s))ds$) ולכן מספיק לבדוק האם לאופרטור הנ"ל יש פתרון יחיד.

נראה ראשית כי יש נקודת שבת (ולכן פתרון לבעיית קושי) על כל קטע I שאורכו קטן או

שווה מ- $\frac{1}{2L(b-a)}$ ולכל תנאי התחלה $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta \in I$.

ההעתקה $Af = \xi + \int_{\eta}^{x} F(s, f(s))ds$ היא ההעתקה מכווצת (במרחב הפונקציות הרציפות על הקטע I). ולכן בכל קטע כזה יש נקודת שבת לאופרטור A, כלומר ישפתרון יחיד לבעייה $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(\eta) = \xi \end{cases}$ בקטע הנ"ל.

נחלק את הקטע $[a,b]$ לקטעים $I_0 = [a_0, b_0], \ldots, I_m = [a_m, b_m]$ שאורכם קטן מ- $\frac{1}{2L}$.

בקטע I_0 יש פתרון ויחיד לבעיה $f(x) = y_0 + \int_a^x F(s, f(s))ds$ (ע"פ משפט נקודות שבת),

נסמן $y_1 = f(b_0)$ באותו אופן יש פתרון יחיד בקטע I_1 לבעיה $f(x) = y_1 + \int_a^x F(s, f(s))ds$.

וכן הלאה לשאר הקטעים (דהיינו נגדיר $y_j = f(b_{j-1})$ ואז יש פתרון יחיד ל- $f(x) = y_j + \int_a^x F(s, f(s))ds$ בקטע I_j).

שאלה 2

תהי $F(x,y)$ פונקציה יורדת במובן הרחב במשתנה y עבור כל x קבוע.

א. הראה כי אם f, g מקיימות את המשוואה $y' = F(x,y)$ אזי לכל $a < b$ מתקיים $|h(b)| \le |h(a)|$ כאשר $h(x) = f(x) - g(x)$.

ב. הסק מחלק א' משפט יחידות "חד – צדדי" (לכל $x \ge a$) למשוואה $y' = F(x,y)$ בצירוף תנאי ההתחלה $y(a) = y_0$.

תשובה 2

א. נתבונן ב $x \in \mathbf{R}$ כלשהו.

אם $h(x) \geq 0$ אז $|h(x)| = h(x)$ ומתקיים

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = F(x, f(x)) - F(x, g(x)) \leq 0$, כי $F(x,y)$ פונקציה יורדת במובן הרחב ומתקיים $f(x) \geq g(x)$. ומכאן נסיק כי $h(x)$ יורדת.

אם $h(x) \leq 0$ אז $|h(x)| = -h(x)$ ומתקיים

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = F(x, f(x)) - F(x, g(x)) \geq 0$ כי $F(x,y)$ פונקציה יורדת במובן הרחב ומתקיים $f(x) \leq g(x)$. ומכאן נסיק כי $h(x)$ עולה וכי $-h(x)$ יורדת.

בשני המקרים $|h(x)|$ יורדת ולכן לכל $a < b$ מתקיים $|h(b)| \leq |h(a)|$.

ב. יהי $x \geq a$, לפי חלק א׳: $|h(x)| \leq |h(a)|$ אך במקרה זה $h(a) = f(a) - g(a) = 0$ ולכן $|h(x)| \leq 0$ ומתקיים $h(x) \equiv 0$ או $f \equiv g$ כנדרש.

שאלה 3

לכל אחת מהמשוואות הבאות בצירוף תנאי ההתחלה $y(0) = y_0$:

קבע בעזרת משפט הקיום והיחידות, לכל ערך אפשרי של y_0 , האם קיים פתרון והאם הוא יחיד.

פתור כל אחת מהמשוואות ובדוק באופן זה את תשובתך.

א. $y' + \frac{2}{x+1} y = 5(x+1)^2$

ב. $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$

ג. $y' = \frac{y+1}{x+y}$

תשובה 3

א. זוהי משוואה ליניארית כאשר הפונקציות $\frac{2}{x+1}$ ו $5(x+1)^2$ רציפות בקטע $(-1, \infty)$ המכיל את הנקודה $x = 0$ ולכן מובטח פתרון יחיד ש״חי״ בקטע זה.

נפתור ונקבל: $y = (x+1)^3 + \frac{y_0 - 1}{(x+1)^2}$ - הפתרון היחיד לכל y_0 .

ב. $f(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} \Leftarrow f$ רציפה ו $f_y = y^{-\frac{1}{3}}$ חסומה בסביבת $y_0 \neq 0$ ומכאן פונקצית ליפשיץ. ומכאן לכל $y_0 \neq 0$ מובטח פתרון יחיד.

$$y' = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} \Leftarrow dx = \frac{2}{3} y^{\frac{-2}{3}} dy \Leftarrow 2y^{\frac{1}{3}} = x + c \Leftarrow y = \left(\frac{x + 2\cdot\sqrt[3]{y_0}}{2}\right)^3 .$$

כמו כן קיים הפתרון $y = 0$ המתאים גם הוא לתנאי ההתחלה $y_0 = 0$.

ג. $f(x,y)=\dfrac{y+1}{x+y}$ רציפה לכל $x\neq -y$. $f_y=\dfrac{x-1}{(x+y)^2}$ רציפה ולכן חסומה בסביבת כל נקודה עבורה $x\neq -y$.

ולכן קיים פתרון יחיד לכל $y_0\neq 0$. אם $y_0=0$ אז לא קיים כלל פתרון כי נקבל $y'(0)$ אינו מוגדר.

נפתור: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+1}{x+y}\Leftarrow \dfrac{d(y+1)}{d(x-1)}=\dfrac{y+1}{(x-1)+(y+1)}\Leftarrow$ נציב $u=y+1,\ v=x-1\Leftarrow$

$\dfrac{du}{dv}=\dfrac{u}{v+u}\Leftarrow \dfrac{du}{dv}=\dfrac{\frac{u}{v}}{1+\frac{u}{v}}\Leftarrow$ ונציב $z=\dfrac{u}{v}$ ומתקיים $\dfrac{du}{dv}=z+v\dfrac{dz}{dv}\Leftarrow$

$v\dfrac{dz}{dv}=\dfrac{-z^2}{1+z}\Leftarrow \dfrac{1+z}{-z^2}dz=\dfrac{dv}{v}\Leftarrow \dfrac{1}{z}-\ln z=\ln v+c\Leftarrow Cvz=e^{\frac{1}{z}}\Leftarrow$

$C(y+1)=e^{\frac{x-1}{y+1}}$ ($C=\dfrac{1}{1+y_0}e^{\frac{-1}{1+y_0}}$). כמו כן קיים הפתרון $y=-1$ מהחלוקה ב u המתאים לתנאי $y_0=-1$.

שאלה 4

הוכח כי כל פתרון של המשוואה $y'=xye^{-y^2}+y$ מוגדר בישר הממשי כולו.

תשובה 4

$f(x,y)=xye^{-y^2}+y$, f רציפה לכל x,y. $f_y=xe^{-y^2}-2y^2xe^{-y^2}+1=1+e^{-y^2}(x-2y^2)$.

לכל x קבוע מתקיים $\lim\limits_{y\to\pm\infty}f_y=1$ וניתן להוכיח שלכן לכל $x,y\in\mathbf{R}^2$ f_y חסומה ומכאן פונקצית ליפשיץ. לפי המשפט שנלמד הפתרון "חי" בישר הממשי כולו.

שאלה 5

יהיו $p(x),q(x)$ פונקציות רציפות בסביבת $x=0$ במשוואת ברנולי: $y'+p(x)y=q(x)y^\lambda$. נתון כי לכל $c\in\mathbf{R}$ $y=\left(\dfrac{c+\cos(2x)}{\cos(x)}\right)^2$ פותר את המשוואה. הוכח כי $\lambda<1$.

תשובה 5

נניח בשלילה $\lambda\geq 1$. $y\equiv 0$ הוא פתרון המקיים $y(0)=0$. אך עבור $c=-1$ נקבל את הפתרון $y=\left(\dfrac{-1+\cos(2x)}{\cos(x)}\right)^2$ המקיים גם הוא $y(0)=0$. נציג את המשוואה: $y'=q(x)y^\lambda-p(x)y$ כך ש $f(x,y)=q(x)y^\lambda-p(x)y$ ומתקיים: f רציפה וכן $f_y=\lambda q(x)y^{\lambda-1}-p(x)$ רציפה ולכן חסומה לפי ויירשטרס ומכאן פונקצית ליפשיץ. וזו סתירה למשפט הקיום והיחידות.