# משוואות דיפרנציאליות רגילות

# פתרון תרגיל 4

## שאלה 1

פתור את המשוואות הבאות:

א. $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$

ב. $\left(x^3-3xy^2\right)dx+\left(y^3-3yx^2\right)dy=0$

## תשובה 1

א. נבדוק שהמשוואה מדויקת: $\frac{\partial}{\partial x}\left(4y^3+6yx^2\right)=12xy \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2+6xy^2\right)=12xy$

$\Phi(x,y)=\int\left(3x^2+6xy^2\right)dx=x^3+3x^2y^2+f(y)$ ואז נגזור ונשווה ל $4y^3+6yx^2$

$\Phi_y=6x^2y+f'(y)\Rightarrow f'(y)=4y^3 \Rightarrow f(y)=y^4+C$ ולכן הפתרון הכללי הוא:

$\left(\Phi(x,y)=\right)x^3+3x^2y^2+y^4\equiv C$

ב. המשוואה מדויקת (בידקו) $\Phi(x,y)=\int\left(x^3-3xy^2\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+f(y)$ נגזור לפי $y$ ונקבל $\Phi_y=-3x^2y+f'(y)=-3x^2y+y^3 \Rightarrow f'(y)=y^3 \Rightarrow f(y)=\frac{y^4}{4}+C$ והפתרון הכללי: $\frac{x^4+y^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2=C$

## שאלה 2

נתונה המשוואה: $y^2dx+\left(xy+\tan(xy)\right)dy=0$

השתמש בעובדה ש $d(xy)=ydx+xdy$ ופתור את המשוואה.

## תשובה 2

ניתן שתי שיטות לפתרון שבעצם הן אותה שיטה:

א. $\Leftarrow \left(\frac{z}{x}\right)^2+\left(z+\tan(z)\right)\left(\frac{z'-\frac{z}{x}}{x}\right)=0 \Leftarrow z'=y+xy' \Leftarrow z=xy$ נכפיל ב $x^2$ ונקבל:

$\Leftarrow \frac{z+\tan z}{z\tan z}dz=\frac{dx}{x} \Leftarrow xz'=\frac{z\tan z}{z+\tan z} \Leftarrow z^2+\left(z+\tan(z)\right)\left(xz'-z\right)=0$

$y\sin(xy)=C \Leftarrow z\sin z=Cx \Leftarrow \ln(\sin z)+\ln(z)=\ln(x)+c$ (ויש להוסיף כמובן את הפתרון $y=0$).

ב. נכתוב את המשוואה: $\Leftarrow yd(xy)+\tan(xy)dy=0 \Leftarrow y\left(ydx+xdy\right)+\tan(xy)dy=0$

$y\sin(xy)=C \Leftarrow \ln(y)=-\ln\left(\sin(xy)\right)+c \Leftarrow \frac{dy}{y}=-\frac{d(xy)}{\tan(xy)}$.

# שאלה 3

פתור את המשוואות הבאות:

א. $\left(2x^3y^2-y\right)dx+\left(2x^2y^3-x\right)dy=0$

ב. $y^2\left(ydx-2xdy\right)=x^3\left(xdy-2ydx\right)$

ג. $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2ydy=0$

# תשובה 3

א. $$\Leftarrow\ 2\left(xdx+ydy\right)-\frac{\left(ydx+xdy\right)}{x^2y^2}=0\ \Leftarrow\ 2x^2y^2\left(xdx+ydy\right)-\left(ydx+xdy\right)=0$$

$y=0$ וכן $x^2+y^2+\frac{1}{xy}=c\ \Leftarrow\ d\left(x^2+y^2\right)+d\left(\frac{1}{xy}\right)=0$

ב. $$\Leftarrow\ y^3x\left(\frac{dx}{x}-\frac{2dy}{y}\right)=x^4y\left(\frac{dy}{y}-\frac{2dx}{x}\right)\ \Leftarrow\ y^2\left(ydx-2xdy\right)=x^3\left(xdy-2ydx\right)$$

נשים לב $\Leftarrow\ y^2d\left(\ln\left(\frac{x}{y^2}\right)\right)=x^3d\left(\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)\right)\ \Leftarrow\ y^3xd\left(\ln\left(\frac{x}{y^2}\right)\right)=x^4yd\left(\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)\right)$

כי $y=\left(\left(\frac{y}{x^2}\right)\left(\frac{x}{y^2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{3}}$ ו $x=\left(\left(\frac{x}{y^2}\right)\left(\frac{y}{x^2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{3}}$, נציב $u=\ln\left(\frac{x}{y^2}\right), v=\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$

ונקבל: $\Leftarrow\ -3e^{\frac{-u}{3}}=\frac{-3}{4}e^{\frac{-4v}{3}}+C\ \Leftarrow\ e^{\frac{-u}{3}}du=e^{\frac{-4v}{3}}dv\ \Leftarrow\ \left(e^{v+2u}\right)^{-\frac{2}{3}}du=\left(e^{u+2v}\right)^{-1}dv$

נציב חזרה ונקבל: $4y^2=x^3+c\sqrt[3]{xy^4}$

ג. $$\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2ydy=0\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)dx+d\left(x^2+y^2\right)=0\Rightarrow dx+\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=0$$

והפתרון הכללי: $\int^x dx+\int^u\frac{du}{u}=C\Rightarrow x+\ln|u|=C\Rightarrow x+\ln|xy|=C$

הערה: $x\equiv 0, y\equiv 0$ הוא פתרון אך לא ניתן להציג את האחד כפונקציה של השני.