משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל 3

שאלה 1

פתור את המשוואות הבאות:

א. $xy' - y = (x+y)(\ln(x+y) - \ln(x))$

ב. $y' = \dfrac{2y^3 - x^2 y}{2x^2 y - x^3}$

תשובה 1

א. נחלק את המשוואה ב x ונקבל: $y' - \frac{y}{x} = \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$, נציב $z = \frac{y}{x}$ $\Leftarrow$

$y' = xz' + z$ והמשוואה המתקבלת $xz' = (1+z)\ln(1+z)$ $\Leftarrow$ $\dfrac{dz}{(1+z)\ln(1+z)} = \dfrac{dx}{x}$ $\Leftarrow$

$\ln(\ln(1+z)) = c + \ln(x)$ $\Leftarrow$ $z = e^{cx} - 1$ $\Leftarrow$ $y = x(e^{cx} - 1)$.

ב. נחלק את המשוואה ב x^3 ונקבל: $y' = \dfrac{2\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{y}{x}}{2\frac{y}{x} - 1}$, נציב $z = \frac{y}{x}$ $\Leftarrow$ $y' = xz' + z$ ונקבל

$xz' + z = \dfrac{2z^3 - z}{2z-1}$ $\Leftarrow$ $xz' = \dfrac{2z^3 - 2z^2}{2z-1}$ $\Leftarrow$ $\dfrac{2z-1}{2z^3 - 2z^2}dz = \dfrac{dx}{x}$ $\Leftarrow$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_c^z \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \ln(x)$ $\Leftarrow$ $\dfrac{-1}{z} + \ln\left(\dfrac{z-1}{z}\right) + c = 2\ln(x)$ $\Leftarrow$ $e^{\frac{x}{y}} = k\dfrac{y-x}{x^2 y}$.

שאלה 2

א. נתונה המשוואה $x^\alpha y \cdot y' + y^\alpha = x^\beta$ כאשר $\beta = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}$. הוכח כי קיים m עבורו משוואה זו היא הומוגנית במשתנה z, המקיים $y = z^m$.

ב. פתור את המשוואה (בתלות α) במקרה ש $\beta = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}$ ו- $\alpha \notin \{0,1,2\}$ (השאר את התשובה עם אינטגרל לא מסויים).

תשובה 2

א. $y = z^m$ $\Leftarrow$ $y' = mz^{m-1}z'$ $\Leftarrow$ נציב במשוואה ונקבל: $x^{\alpha} mz^{2m-1} \cdot z' + z^{m\alpha} = x^{\beta}$.

המשוואה תהא הומוגנית אם כל החזקות שוות $\Leftarrow$ $\alpha + 2m - 1 = m\alpha = \beta$, נפתור עבור m:

$m = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}$, ועבור β נקבל $\beta = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}$.

ב. מההצבות שקיבלנו בחלק א' נקבל: $x^{\alpha} \frac{\alpha-1}{\alpha-2} z^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \cdot z' + z^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}} = x^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}$. נחלק ב $x^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}$

ונקבל: $\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \cdot z' + \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}} = 1$. כעת נציב $u = \frac{z}{x}$ $\Leftarrow$ $z' = xu' + u$ $\Leftarrow$

$u^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha-2}(xu' + u) + u^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}} = 1$ $\Leftarrow$ (ע"י הפרדת משתנים)

$\frac{dx}{x} = \frac{(\alpha-1)u^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} du}{(\alpha-2) - (\alpha-2)u^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}} - (\alpha-1)u^{\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}}}$, ונקבל: $x = e^{\int^{u} \frac{(\alpha-1)t^{\frac{\alpha}{\alpha-2}}dt}{(\alpha-2)-(\alpha-2)t^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2}}-(\alpha-1)t^{\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}}}dt}$

(וכמובן לא נוכל להמשיך מכאן).

שאלה 3

פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x + y}{6x - y}$

ב. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x + y + 4}{6x - y + 8}$

תשובה 3

א. נחלק מונה ומכנה ב x ונקבל: $\frac{dy}{dx} = \frac{6 + \frac{y}{x}}{6 - \frac{y}{x}}$ נציב $z = \frac{y}{x}$ $\Leftarrow$ $y' = xz' + z$ והמשוואה

המתקבלת: $xz' + z = \frac{6 + z}{6 - z}$ $\Leftarrow$ $xz' = \frac{6 - 5z + z^2}{6 - z}$ $\Leftarrow$ $\frac{(6 - z)}{6 - 5z + z^2} dz = \frac{dx}{x}$ $\Leftarrow$

מפתרון האינטגרלים נקבל: $(y - 3x)^3 = c(y - 2x)^4$.

ב. $\frac{6(x+1) + (y-2)}{6(x+1) - (y-2)} = \frac{6x + y + 4}{6x - y + 8}$ וכן $\frac{dy}{dx} = \frac{d(y-2)}{d(x+1)}$, נשתמש בחלק א' ונקבל:

$(y - 2 - 3(x+1))^3 = c(y - 2 - 2(x+1))^4$ $\Leftarrow$ $(y - 3x - 5)^3 = c(y - 2x - 4)^4$.

שאלה 4

מצא את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות:

א. $\Phi(x,y)=e^x\cos y+y^7\tan x$

ב. $\Phi(x,y)=f(x)g(y)$

ג. $\Phi(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+g(xy)$

תשובה 4

א. $\Phi'_x=e^x\cos y+\dfrac{y^7}{\cos^2 x}\quad \Phi'_y=-e^x\sin y+7y^6\tan x$

ב. $\Phi'_x=f'(x)g(y)\quad \Phi'_y=f(x)g'(y)$

ג. מכלל השרשרת $\Phi'_x=-f'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{y}{x^2}+y\cdot g'(xy)\quad \Phi'_y=f'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x}+x\cdot g'(xy)$

שאלה 5

פתור את המשוואות הבאות:

א. $\left(2xy^4+\sin(y)\right)+\left(4x^2y^3+x\cos(y)\right)y'=0$

ב. $y'=\dfrac{1+y^2+3x^2y}{1-2xy-x^3}$

תשובה 5

א. $\left(2xy^4+\sin(y)\right)dx+\left(4x^2y^3+x\cos(y)\right)dy=0 \Leftarrow$

$M=2xy^4+\sin(y),\ N=4x^2y^3+x\cos(y)$.

$M_y=8xy^3+\cos(y),\ N_x=8xy^3+\cos(y) \Leftarrow$ המשוואה מדוייקת.

$\phi(x,y)=x^2y^4+x\sin(y)+f(y)$, ונקבל $f(y)=c$. ומכאן הפתרון:

$x^2y^4+x\sin(y)=c$.

ב. $\left(1-2xy-x^3\right)dy-\left(1+y^2+3x^2y\right)dx=0 \Leftarrow M=-1-y^2-3x^2y,\ N=1-2xy-x^3$

$M_y=-2y-3x^2,\ N_x=-2y-3x^2$ המשוואה מדוייקת.

$\phi(x,y)=-x-xy^2-x^3y+f(y)$, ונקבל $f(y)=y+c$. ומכאן הפתרון:

$-x-xy^2-x^3y+y=c$.