משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרונות לתרגיל 2

שאלה 1

פתור את המשוואות הבאות:

א. $y' + 2y = x + e^{-x}$

ב. $y' - \frac{1}{x} y = x$

ג. $x\ln(x)y' + my = \ln^{-m}(x) : m \in \mathbf{N}$.

ד. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$

תשובה 1

א. נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x 2dt} = e^{2x}$ ונקבל: $\left(e^{2x}y\right)' = xe^{2x} + e^x \Leftarrow$
$y = ce^{-2x} + e^{-x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$.

ב. נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x \frac{-dt}{t}} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$ ונקבל: $\left(\frac{y}{x}\right)' = 1 \Leftarrow y = cx + x^2$.

ג. נחלק את המשוואה ב $x\ln(x)$ ונקבל: $y' + \frac{m}{x\ln(x)} y = \frac{\ln^{-m}(x)}{x\ln(x)}$. נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x \frac{mdt}{x\ln(x)}} = e^{m\ln(\ln(x))} = \ln^m(x)$ ונקבל $\left(\ln^m(x)y\right)' = \frac{1}{x\ln(x)} \Leftarrow$
$y = \ln^{-m}(x)(c + \ln(\ln(x)))$.

ד. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x - y^2} \Leftarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3x - y^2}{y} \Leftarrow$ נקבל משוואה ליניארית ב x $x' - \frac{3}{y} x = -y$ נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^y \frac{-3dt}{t}} = e^{-3\ln(y)} = \frac{1}{y^3}$ ונקבל: $\left(\frac{x}{y^3}\right)' = -\frac{1}{y^2} \Leftarrow x = cy^3 + y^2$.

שאלה 2

א. נתונה משוואת ריקטי בעלת הצורה הבאה: $y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2$, כאשר f, g, h רציפות בקטע I. הראה כי הטרנספורמציה $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{w(x)}$, כאשר $y_1(x)$ הוא פתרון מסויים למשוואה, מוביל למשוואה ליניארית ב $w(x)$.

ב. פתור את המשוואה $y' = f(x) + g(x)y - (f(x) + g(x))y^2$ בצירוף תנאי ההתחלה $y(0) = 2$.

תשובה 2

א. $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{w(x)} \Leftarrow y'(x) = y_1'(x) - \frac{w'(x)}{w^2(x)} \Leftarrow$

$$y_1'(x) - \frac{w'(x)}{w^2(x)} = f(x) + g(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{w(x)}\right) + h(x)\left({y_1}^2(x) + \frac{2y_1(x)}{w(x)} + \frac{1}{w^2(x)}\right) \Leftarrow$$

נשתמש בעובדה כי $y_1(x)$ הוא פתרון של המשוואה, נכפיל ב $-w^2(x)$ ונקבל:
$w'(x) = -(g(x) + 2y_1(x)h(x))w(x) - h(x)$, משוואה ליניארית ב $w(x)$.

ב. משוואה זו הינה משוואת ריקטי ולכן על מנת להשתמש בשיטה מסעיף א' ננחש פתרון מסויים, שבמקרה זה קל לנחשו: $y_1(x) = 1$.
$w(x)$ מקיים את המשוואה: $w'(x) = -(g(x) - 2(f(x) + g(x)))w(x) - (f(x) + g(x))$, או $w'(x) - (g(x) + 2f(x))w(x) = -(f(x) + g(x))$ ותנאי ההתחלה $w(0) = 1$.

$$y = 1 + \left(e^{\int_0^x (g(t)+2f(t))dt}\left(1 - \int_0^x (f(s) + g(s)) \cdot e^{\int_0^s (g(t)+2f(t))dt} ds\right)\right)^{-1}$$

שאלה 3

פתור את המשוואה הבאה: $y' = y^4 \cos(x) + y\tan(x)$.

תשובה 3

זוהי משוואת ברנולי: $y' - y\tan(x) = y^4\cos(x)$, נציב $z = y^{-3}$ ונקבל:

$z' + 3\tan(x)z = -3\cos(x) \Leftarrow$ נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x 3\tan(t)dt} = e^{-3\ln(\cos(x))} = \frac{1}{\cos^3 x}$

ונקבל: $\left(\frac{z}{\cos^3(x)}\right)' = \frac{-3}{\cos^2(x)} \Leftarrow z = c\cos^3(x) - 3\sin(x)\cos^2(x) \Leftarrow$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{c\cos^3(x) - 3\sin(x)\cos^2(x)}}$$

שאלה 4

נתונה המשוואה $y' + ay = f(x)$ כאשר קיים $M > 0$ כך שלכל $x \in \mathbf{R}$ מתקיים $|f(x)| \le M$.

הוכח כי אם $a > 0$ אזי כל פתרון של המשוואה חסום ב $[0,\infty)$.

תשובה 4

נכפיל את המשוואה בגורם $e^{\int^x a\,dt} = e^{ax}$ ונקבל: $\left(e^{ax}y\right)' = e^{ax}f(x)$ $\Leftarrow$

$$y(x) = e^{-ax}\left(c + \int_0^x f(s)e^{as}ds\right)$$

$$|y(x)| = \left|e^{-ax}\left(c + \int_0^x f(s)e^{as}ds\right)\right| = e^{-ax}\left|c + \int_0^x f(s)e^{as}ds\right| \le e^{-ax}\left(|c| + \left|\int_0^x f(s)e^{as}ds\right|\right) \le$$

$$e^{-ax}\left(|c| + \int_0^x \left|f(s)e^{as}\right|ds\right) = e^{-ax}\left(|c| + \int_0^x |f(s)|e^{as}ds\right) \le e^{-ax}\left(|c| + \int_0^x Me^{as}ds\right) = e^{-ax}\left(|c| + \frac{M}{a}e^{ax}\right) =$$

$$|c|e^{-ax} + \frac{M}{a} \le |c| + \frac{M}{a}$$

ואכן **כל** פתרון חסום בקטע $[0,\infty)$.

שאלה 5

תהי $g(x)$ גזירה ברציפות ב $\mathbf{R}$, ו $f(x)$ (ניתן להוסיף $f(x)$ רציפה למקוטעין)המוגדרת ב $\mathbf{R}$

המקיימת לכל $x \in \mathbf{R}$: $f(x) = e^{g(x)} + \int_0^x g'(t)f(t)dt$. מצא את $f(x)$. (הוכח תחילה כי f

רציפה וגזירה ב $\mathbf{R}$).

תשובה 5

לפי תכונת האינטגרל הבלתי מסויים $\int_0^x g'(t)f(t)dt$ היא פונקציה רציפה לכל $x \in \mathbf{R}$. מכאן ש

$f(x)$ רציפה כסכום רציפות, ולכן גם $g'(t)f(t)$ רציפה (כמכפלת רציפות). לפי המשפט היסודי

של החשבון האינטגרלי הפונקציה $\int_0^x g'(t)f(t)dt$ גזירה לכל $x \in \mathbf{R}$, ולכן גם $f(x)$ גזירה לכל

$x \in \mathbf{R}$. נגזור ונקבל: $f'(x) = g'(x)e^{g(x)} + g'(x)f(x)$ $\Leftarrow$ $f'(x) - g'(x)f(x) = g'(x)e^{g(x)}$

$\Leftarrow$ $\left(e^{-g(x)}f(x)\right)' = g'(x)$ $\Leftarrow$ $f(x) = e^{g(x)}(c + g(x))$. על מנת לחשב את הקבוע נציב במשוואה

המקורית $x = 0$, ונקבל: $f(0) = e^{g(0)}$ ולכן $c = 1 - g(0)$ $\Leftarrow$ $f(x) = e^{g(x)}(1 - g(0) + g(x))$