משוואות דיפרנציאליות רגילות

תשובות 13

שאלה 1

נתונה הקבוצה $\left\{t^2-t+3, 2t^2+t, 2t-4\right\}$.

א. חשבו את הוורונסיקאן.

ב. הוכיחו ישירות כי הקבוצה תלויה או בלתי תלויה לינארית.

תשובה 1

א. נחשב את הוורונסקיאן:

$$W=\begin{vmatrix} t^2-t+3 & 2t^2+t & 2t-4 \\ 2t-1 & 4t+1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2t^2+t & 2t-4 \\ 4t+1 & 2 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} t^2-t+3 & 2t-4 \\ 2t-1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=4\left[2t^2+t-(t-4)(4t+1)-2t^2+2t-6+(2t-4)(2t-1)\right]=$$

$$=4\left[8t+2\right]=8(4t+1)$$

ולכן הקבוצה בת"ל.(כי עבור כל $t\neq -1/4$ $W(t)\neq 0$)

ב. אם $\alpha\left(t^2-t+3\right)+\beta\left(2t^2+t\right)+\gamma(2t-4)=0$ אז נקבל מערכת משוואות $3\alpha-4\gamma=0$, $-\alpha+\beta+2\gamma=0$, $\alpha+2\beta=0 \Leftarrow \alpha=\beta=\gamma=0$ משל.

שאלה 2

נתונה הקבוצה $\left\{t^3, t^2\left|t\right|\right\}$.

א. חשבו את הוורונסקיאן (בכל $t\neq 0$) והוכיחו כי $W\equiv 0$.

ב. הוכיחו כי הקבוצה בלתי תלויה ליניארית בכל קטע המכיל את האפס.

ג. האם קיימות $a(t), b(t)$ רציפות כך שהקבוצה תהווה קבוצת פתרונות למשוואה $\ddot{x}+a(t)\dot{x}+b(t)x=0$ בקטע $[-1,1]$? ענה על השאלה גם עבור הקטע $[1,2]$.

תשובה 2

א. $\forall t\neq 0\; W=\begin{vmatrix} t^3 & t^2\left|t\right| \\ 3t^2 & 3t\left|t\right| \end{vmatrix}=3t^4\left|t\right|-3t^4\left|t\right|\equiv 0$.

ב. נחפש α,β המקיימים: $\alpha t^3+\beta t^2\left|t\right|=0$. עבור $t>0$ נקבל: $\alpha+\beta=0$. עבור $t<0$ נקבל $\alpha-\beta=0 \;\Leftarrow\; \alpha=\beta=0$ והקבוצה בת"ל.

ג. הקטע $[-1,1]$ מכיל את האפס ולכן הפונקציות בת"ל. ומכאן אם קיימת משוואה כזו אז קיים $t_0\in[-1,1]$ כך ש $W(t_0)\neq 0$, בסתירה לסעיף א'.

בקטע $[1,2]$ מתקיים $t^3=t^2\left|t\right|$, ולכן נוכל לבחור למשל את המשוואה: $\ddot{x}-\frac{2}{t}\dot{x}=0$ (אם רוצים משוואה עם מקדמים קבועים ניתן לבחור את $x^{(4)}=0$).

שאלה 3

א. יהיו $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ פונקציות וקטוריות (כלומר וקטורי עמודה מסדר $n\times 1$), נניח כי הוורונסקיאן $W(t)\neq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$ (כלומר $\phi_{n\times n}=(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)$ הפיכה לכל $t\in\mathbb{R}$) הוכיחו כי קיימת משוואה לינארית $\dot{x}=A(t)x$ (כאשר $A(t)$ רציפה) כך ש- $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ מערכת יסודית (כלומר $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ מהווים בסיס למרחב הפתרונות).
רמז: $\dot{\phi}\phi^{-1}$

ב. יהיו $\xi_1(t),\xi_2(t),\dots,\xi_n(t)$ פונקציות (**לא** וקטוריות) נניח כי הוורונסקיאן $W(t)\neq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$ (כזכור $W(t)=\det\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\\ \dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2 & & \dot{\xi}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_1^{(n-1)} & \xi_2^{(n-1)} & \cdots & \xi_n^{(n-1)}\end{pmatrix}$).
האם קיימת משוואה עם מקדמים רציפים מסדר n $x^{(n)}+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_0(t)x=0$ כך ש- $\xi_1(t),\xi_2(t),\dots,\xi_n(t)$ מערכת יסודית(כלומר בסיס למרחב הפתרונות)?
רמז: חישבו על שיפוץ הוורונסקיאן.

ג. האם המשוואה מסעיף ב' יחידה?

ד. *האם המשוואה מסעיף א' יחידה?

תשובה 3

א. נסמן $A(t)=\dot{\phi}\phi^{-1}$ (ברור כי $A(t)$ רציפה) ונטען כי $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ מערכת יסודית של $\dot{x}=Ax$. ראשית נראה כי כל ה- $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ פתרונות של המשוואה. נעשה זאת בבת אחת כלומר נבדוק האם $\dot{\phi}\overset{?}{=}A\phi$. ואכן $A\phi=\dot{\phi}\phi^{-1}\phi=\dot{\phi}$. כלומר הראנו כי כל ה- $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ פתרונות, בנוסף ידוע כי הם בת"ל ולכן הם מערכת בסיסית.

הערה: באותה דרך בדיוק נוכל להכליל את הסעיף הנ"ל כלומר אם $W(t)\neq 0$ לכל $t\in I$ כאשר I קטע כלשהו, אז יש משוואה לינארית עם מקדמים רציפים כך ש- $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ מערכת יסודית בקטע I.

ב. כדי להגיע למשוואה ש- $\xi_1(t),\xi_2(t),\dots,\xi_n(t)$ יהיו המערכת הבסיסית שלה נסתכל ב- $W(x,\xi_1,\dots,\xi_n)$ כלומר ב-

$$W(x,\xi_1,\dots,\xi_n)(t)=\det\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \dot{x} & \dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2 & & \dot{\xi}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{(n)} & \xi_1^{(n)} & \xi_2^{(n)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

. זה פולינום ב- $x,\dot{x},\dots,x^{(n)}$. הוא לא מתוקן אז נתקנו. המקדם של $x^{(n)}$ הוא בדיוק $W(\xi_1,\dots,\xi_n)\neq 0$. ולכן נסתכל במשוואה (לפי x): $\frac{W(x,\xi_1,\dots,\xi_n)}{W(\xi_1,\dots,\xi_n)}=0$. זו משוואה מסדר n מתוקנת, ברור (ע״פ הצבה) כי $\xi_1(t),\xi_2(t),\dots,\xi_n(t)$ פתרונות והם בת״ל לפי הנתונים, ולכן $\xi_1(t),\xi_2(t),\dots,\xi_n(t)$ מערכת יסודית של המשוואה הנ״ל.

הערה: גם כאן ניתן בקלות להכליל את התוצאה לקטע I במקום כל הישר. כלומר אם $W(t)\neq 0$ לכל $t\in I$ כאשר I קטע כלשהו, אז יש משוואה לינארית עם מקדמים רציפים כך ש- $\xi_1(t),\xi_2(t),\dots,\xi_n(t)$ מערכת יסודית בקטע I.

ג. כן. נניח כי $\xi_1(t),\xi_2(t),\dots,\xi_n(t)$ מערכת יסודית לשתי המשוואות הבאות:

$$x^{(n)}+\tilde{a}_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\cdots+\tilde{a}_0(t)x=0,$$

$$x^{(n)}+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_0(t)x=0$$

נסמן ב- i את האינדקס הראשון כך ש- $a_i\neq\tilde{a}_i$ ואז נפחית את שתי המשוואות ונקבל $(a_i-\tilde{a}_i)x^{(i)}+\cdots+(a_0-\tilde{a}_0)x=0$ נחלק במקדם העליון (שאינו אפס בקטע ע״פ הנחתנו) ונקבל משוואה עם מקדמים רציפים בקטע:

$x^{(i)}+\cdots+{(a_0-\tilde{a}_0)}\big/{(a_i-\tilde{a}_i)}\,x=0$ שיש לה $n>i$ פתרונות בת״ל בקטע. כמובן שמשוואה כזו יכולה להיות אך ורק משוואת האפס וזה סתירה. ולכן לכל $1\leq i\leq n$, $a_i=\tilde{a}_i$. כלומר הוכחנו יחידות.

ד. התשובה היא כן יש יחידות. הסבר: ננקוט באותה גישה אם $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ היא מערכת יסודית לשתי המשוואות $\dot{x}=Ax$ ו- $\dot{x}=\tilde{A}x$ אז מתקיים $\dot{\phi}=A\phi$ ו- $\dot{\phi}=\tilde{A}\phi$ כאשר $\phi=(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)$. נחסר את שתי המשוואות ונקבל $(A-\tilde{A})\phi=0$, אך מכיוון ו- ϕ הפיכה נובע כי $A-\tilde{A}=0$ משל.

שאלה 4

פיתרו את שתי המערכות הבאות בעזרת שיטת וריאציית המקדמים.

$$\begin{cases}\dot{x} = y + \tan t - 1\\ \dot{y} = -x + \tan t\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x} = 2y - x\\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}\end{cases}$$

תשובה 4

א. נסתכל בצורה וקטורית: $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + F$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ולכן מערכת יסודית היא

$\varphi_2 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \varphi_1 = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$. נחפש פתרון פרטי לפי וריאציית המקדמים. כלומר הוא

יהיה מהצורה $\vec{x}_p = c_1(t)\vec{\varphi}_1 + c_2(t)\vec{\varphi}_2 \Leftarrow \dot{x}_p = \dot{c}_1\varphi_1 + \dot{c}_2\varphi_2 + c_1\dot{\varphi}_1 + c_2\dot{\varphi}_2$ נציב

במשוואה ונקבל (אחרי צמצומים) $\Leftarrow \dot{c}_1\varphi_1 + \dot{c}_2\varphi_2 = F \Leftarrow \phi\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = F$ כאשר

$\phi = (\varphi_1, \varphi_2)$. ולכן

$$= \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tan t - 1 \\ \tan t \end{pmatrix} = \phi^{-1}F = \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

$$\dot{c}_1 = \sin(t)\tan(t) - \sin t + \sin t = \sin(t)\tan(t),$$

$\dot{c}_2 = \sin t - \cos t - \sin(t)\tan(t)$. כדי למצוא את המקדמים c_1, c_2 צריך לאנטגרל,

$$\int \sin(t)\tan(t)\,dt \underset{1}{=} -\cos(t)\tan(t) + \int \frac{dt}{\cos t} \underset{2}{=} -\sin t + \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \text{const}$$

(1)-אינטגרציה בחלקים

(2)-חשבנו אינטגרל דומה בתרגיל הראשון (ההצבה היא $s = \tan\frac{t}{2}$).

ואז נקבל כי $c_1 = -\sin t + \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ ו- $c_2 = -\cos t - \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

כלומר פתרון פרטי הוא

$$\vec{x}_p = \left[-\sin t + \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \left[-\cos t - \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

הערה: שימו לב כי בחרנו את קבועי האינטגרציה להיות אפס. אם היינו בוחרים אחרת אז היינו מקבלים פתרון פרטי אחר, הנבדל משלנו בפתרון של המשוואה ההומוגנית.

ב. הפעם $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ ע״ע הם $1,-2$ ופתרון להומוגנית הוא

$\phi=\begin{pmatrix}e^t & e^{-2t}\\ e^t & 4e^{-2t}\end{pmatrix}$ כלומר $\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t,\varphi_2=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}e^{-2t}$

$\Leftarrow$ $\phi^{-1}=\frac{1}{3e^{-t}}\begin{pmatrix}4e^{-2t} & -e^{-2t}\\ -e^t & e^t\end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\end{pmatrix}=\phi^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{-e^{2t}}{e^{2t}+1}\\ \frac{e^{5t}}{e^{2t}+1}\end{pmatrix}$ נבצע

אינטגרציה: $c_1=\frac{-1}{3}\int\frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}dt=\frac{-1}{6}\ln\left(1+e^{2t}\right)+\text{const}$ (יש לנו אינטגרנד

מהצורה $\frac{f'}{f}$ ולכן הפתרון הוא $\ln|f|$)

$$c_2=\frac{1}{3}\int\frac{e^{5t}}{e^{2t}+1}dt\underset{s=e^t}{=}\frac{1}{3}\int\frac{s^4}{s^2+1}ds=\frac{1}{3}\int\left(\frac{s^4-1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right)ds=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int\left(s^2-1\right)ds+\int\frac{ds}{s^2+1}\right]=\frac{1}{9}s^3-\frac{1}{3}s+\frac{1}{3}\arctan s=$$

$$=\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{3}\arctan\left(e^t\right)+\text{const}$$

ולכן הפתרון הכללי (כי פה השארתי את הקבועים) הוא

$$x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}e^{-2t}$$